

УДК 539.3:537.2

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СОСТАВНОГО
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ПОПЕРЕЧНЫМ
СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Գալպչյան Ս. Վ.

Պ. Վ. Գալպչյան

Շրջանային սեկտորի տեսք ունեցող լայնակի հատույթով կազմած
պիեզաէլեկտրական գրանի հակահարթ դեֆորմացիան

Դիտվել է ծնիչների երկայնությամբ երկայնական սահրի ենթարկված կազմած, տրանսվերսալ - իզոտրոպ նյութերից պատրաստված երկրադարիչ պիեզաէլեկտրական գրանի հակահարթ դեֆորմացիայի խնդիրը: Լուծումը կառուցվել է Ֆուրյեի մեթոդի քննհանրացմամբ: Էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածության վեկտորի և մեխանիկական լարմաների բեկզորի բաղադրիչների համար ստացվել են բանաձևեր: Այդ բանաձևերի միջոցով կատարվել է ստացված արդյունքների թվային վերլուծություն:

P. V. Galpchian

Antiplane deformation of compound piezoelectric cylinder
with cross-section in the form of circular sector

Рассматривается антиплоская задача для составного, двухкомпонентного пьезоэлектрического цилиндра из трансверсально-изотропных материалов, подвергнутого продольному сдвигу вдоль образующих. Решение построено обобщением метода Фурье. Получены формулы для компонентов вектора напряженности электростатического поля и тензора механических напряжений. На основе приведенных формул проведен численный анализ полученных результатов.

Антиплоские задачи для однородных и кусочно-однородных пьезоэлектрических тел рассматривались в работах [1–7].

В цилиндрической системе координат r, θ, z составные части цилиндра ограничены координатными поверхностями $\theta = -\beta, \theta = 0, \theta = \alpha$ и $r = a$. При этом $0 < (\alpha, \beta) < 2\pi, 0 < \alpha + \beta \leq 2\pi, a > 0$. Ось z является образующей цилиндра. Главные оси симметрии составных частей параллельны образующим. Составные части цилиндра склеены между собой по общей части боковых поверхностей тонким электропроводящим клеем.

Если пренебречь упругими свойствами соединяющего слоя клея, то при отсутствии массовых сил для малых деформаций в рамках линейной теории электроупругости рассматриваемая задача упрощается и сводится к уравнениям Лапласа относительно упругого смещения $u_z^{(i)}(r, \theta)$ и потенциала электростатического поля $\Phi^{(i)}(r, \theta)$ ($i = 1, 2$) [1]:

$$\Delta u_z^{(i)}(r, \theta) = 0, \quad \Delta \Phi^{(i)}(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем, индекс 1 соответствует области $\theta \in [-\beta; 0]$, а индекс 2 – $\theta \in [0; \alpha]$.

Зададим граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, -\beta) = 0, \quad D_{\theta}^{(1)}(r, -\beta) = 0, \quad \Phi^{(1)}(a, \theta) = \varphi f_1^{(1)}(\theta) \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, \alpha) = 0, \quad D_{\theta}^{(2)}(r, \alpha) = 0, \quad u_z^{(i)}(a, \theta) = u f_2^{(i)}(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tau_{\theta z}(r, \theta)$ – компонент тензора механических напряжений, $D_{\theta}(r, \theta)$ – компонент вектора электрического смещения, φ и u – постоянные, имеющие размерность электрического поля и перемещения, соответственно, $f_1^{(i)}(\theta)$, $f_2^{(i)}(\theta)$ – заданные функции.

Условия на линии раздела смежных областей будут

$$\Phi^{(1)}(r, 0) = 0, \quad u_z^{(1)}(r, 0) = u_z^{(2)}(r, 0), \quad \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) \quad (3)$$

После упрощений некоторые из условий (2) и (3) примут вид:

$$\begin{aligned} \partial u_z^{(1)}(r, -\beta) / \partial \theta = 0, \quad \partial \Phi^{(1)}(r, -\beta) / \partial \theta = 0 \\ \partial u_z^{(2)}(r, \alpha) / \partial \theta = 0, \quad \partial \Phi^{(2)}(r, \alpha) / \partial \theta = 0 \\ c_{44}^{(1)} \partial u_z^{(1)}(r, 0) / \partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi^{(1)}(r, 0) / \partial \theta = \\ = c_{44}^{(2)} \partial u_z^{(2)}(r, 0) / \partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi^{(2)}(r, 0) / \partial \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $c_{44}^{(i)}$, $e_{15}^{(i)}$ – модуль упругости и пьезомодуль, соответственно.

Из (1)–(4) видно, что электростатический потенциал определяется отдельно, без определения $u_z^{(i)}$. Функции $\Phi^{(i)}$ имеют вид

$$\Phi^{(1)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_k} \sin \alpha_k \theta, \quad \Phi^{(2)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_k} \sin \beta_k \theta \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} B_k = \frac{2\varphi}{\beta} \int_{\beta}^0 f_1^{(1)}(\theta) \sin \alpha_k \theta d\theta, \quad C_k = \frac{2\varphi}{\alpha} \int_0^{\alpha} f_1^{(2)}(\theta) \sin \beta_k \theta d\theta \\ \alpha_k = (2k-1)\pi/2\beta, \quad \beta_k = (2k-1)\pi/2\alpha \end{aligned}$$

Перейдём к определению перемещения $u_z(r, \theta)$.

Введём функции $\Psi_k(\theta)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) [3, 9, 10]

а) При $\sin \lambda_k \alpha \neq 0$ (или $\sin \lambda_k \beta \neq 0$)

$$\Psi_k(\theta) = \begin{cases} \mu \cos \lambda_k (\beta + \theta) \sin \lambda_k \alpha & (-\beta \leq \theta \leq 0) \\ -\cos \lambda_k (\alpha - \theta) \sin \lambda_k \beta & (0 \leq \theta \leq \alpha) \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

б) При $\cos \lambda_k \alpha \neq 0$ (или же $\cos \lambda_k \beta \neq 0$)

$$\Psi_k(\theta) = \begin{cases} \cos \lambda_k (\beta + \theta) \cos \lambda_k \alpha & (-\beta \leq \theta \leq 0) \\ \cos \lambda_k (\alpha - \theta) \cos \lambda_k \beta & (0 \leq \theta \leq \alpha) \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

где λ_k ($k=1, 2, \dots$) – положительные корни уравнения [8]

$$\mu \sin \lambda \alpha \cos \lambda \beta + \cos \lambda \alpha \sin \lambda \beta = 0, \quad \mu = c_{44}^{(2)} / c_{44}^{(1)} \quad (6)$$

пронумерованные в порядке возрастания.

Уравнение (6) имеет только действительные корни.

В обоих случаях $\Psi_0(\theta) \equiv 1$, а $\lambda_0 = 0$.



Нетрудно проверить, что совокупность функций $\{\Psi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$ образует полную в $L_2(-\beta, \alpha)$ и ортогональную с весом $\rho(\theta)$ систему, где

$$\rho(\theta) = \begin{cases} 1 & (-\beta \leq \theta < 0) \\ \mu & (0 < \theta \leq \alpha) \end{cases}$$

то есть

$$\int_{-\beta}^{\alpha} \rho(\theta) \Psi_k(\theta) \Psi_n(\theta) d\theta = \delta_{kn} \omega_k \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

где δ_{kn} — символ Кронекера.

Введём обозначения

$$f_2(\theta) = \begin{cases} f_2^{(1)}(\theta) \\ f_2^{(2)}(\theta) \end{cases} \quad \Phi^*(r, \theta) = \begin{cases} e_{15}^{(1)} \Phi^{(1)}(r, \theta) / c_{44}^{(1)} \\ e_{15}^{(2)} \Phi^{(2)}(r, \theta) / c_{44}^{(2)} \end{cases}$$

и представим функцию $u_z(r, \theta)$ в виде

$$u_z(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k} \Psi_k(\theta) - \Phi^*(r, \theta) \quad (-\beta \leq \theta \leq \alpha) \quad (8)$$

Функция $u_z(r, \theta)$ при любых значениях коэффициентов A_k удовлетворяет как граничным условиям на лучах $\theta = -\beta$ и $\theta = \alpha$, так и всем контактным условиям на $\theta = 0$. Удовлетворение граничному условию на дуге окружности ($r = a, -\beta \leq \theta \leq \alpha$) приводит к соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \Psi_k(\theta) - \Phi^*(a, \theta) = u f_2(\theta) \quad (-\beta \leq \theta \leq \alpha) \quad (9)$$

Пользуясь формулой ортогональности (7), из соотношения (9) для коэффициентов A_k получим

$$\omega_k A_k = \int_{-\beta}^{\alpha} [\Phi^*(a, \theta) + u f_2(\theta)] \rho(\theta) \Psi_k(\theta) d\theta \quad (10)$$

В развёрнутом виде формула (10) представляется в виде

$$\omega_k A_k = \int_{-\beta}^0 [\varphi e_{15}^{(1)} f_1^{(1)}(\theta) / c_{44}^{(1)} + u f_2^{(1)}(\theta)] \Psi_k(\theta) d\theta + \\ + \mu \int_0^{\alpha} [\varphi e_{15}^{(2)} f_1^{(2)}(\theta) / c_{44}^{(2)} + u f_2^{(2)}(\theta)] \Psi_k(\theta) d\theta$$

$$\omega_0 = \beta + \mu\alpha, \quad \omega_k = \frac{\mu}{2} (\mu\beta \sin^2 \lambda_k \alpha + \alpha \sin^2 \lambda_k \beta) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Согласно (5) и (8), в частности, для $E_{\theta}^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ будем иметь формулы

$$E_{\theta}^{(1)}(r, \theta) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \alpha_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha_k - 1} \cos \alpha_k \theta \quad (11)$$

$$E_{\theta}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \beta_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_k - 1} \cos \beta_k \theta$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, \theta) = -\frac{c_{44}^{(2)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k - 1} \sin \lambda_k \alpha \sin \lambda_k (\beta + \theta) \quad (12)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{c_{44}^{(2)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k - 1} \sin \lambda_k \beta \sin \lambda_k (\alpha - \theta)$$

Подобные выражения получаются и для $E_r^{(i)}, \tau_{rz}^{(i)}$.

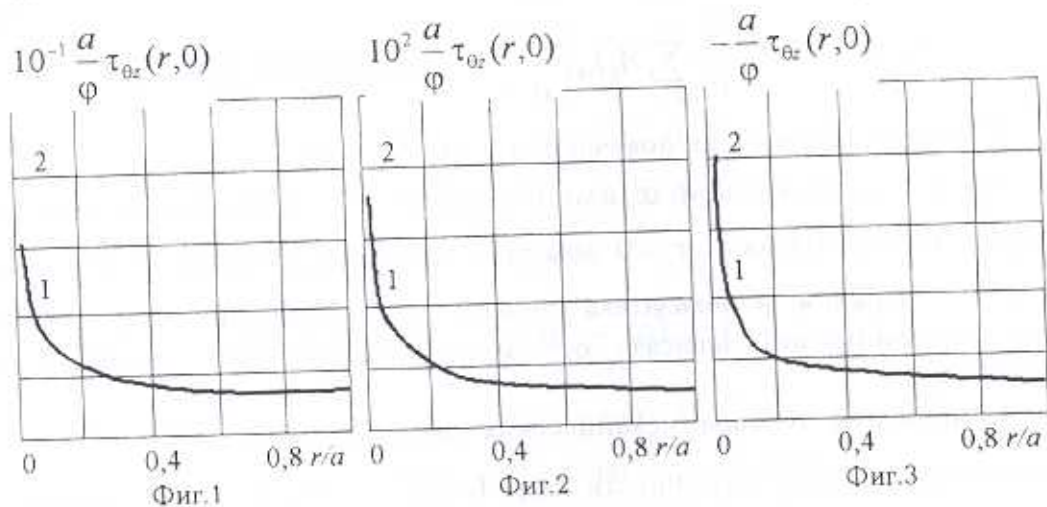
Из (11) ясно, что при α или β больше $\pi/2$, компоненты вектора напряженности в полюсе $r = 0$ обладают особенностью вида $(r/a)^{\alpha_i - 1}$ и $(r/a)^{\beta_i - 1}$. Причем, и показатель степени, и коэффициент особенности (при степени) не зависят от электромеханических постоянных материалов.

Компоненты тензора механических напряжений τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ (12) в полюсе могут иметь особенности вида $(r/a)^{\lambda_i - 1}$. Исследование первого положительного корня λ_1 уравнения (6) проведено в [8,9]. Он, вообще говоря, зависит от значений параметров α, β и μ . Коэффициенты же при особенностях (степеней) зависят от $\alpha, \beta, c_{44}^{(i)}$ и $e_{15}^{(i)}$.

На фиг. 1, 2 и 3 приведены графики изменения $\tau_{\theta z}(r, 0)$ на линии раздела двух материалов $\theta = 0$. Эти графики построены на основе формул (12), в которых, как первое приближение, взяты только слагаемые с индексом 1. Кривая на фиг.1 соответствует случаю, когда цилиндр составлен из двух пьезоэлектрических материалов. Причем, области $[-\beta; 0]$ соответствует пьезокристалл сульфида кадмия (CdS), для которого $c_{44}^{(1)} = 1,49 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15}^{(1)} = -0,21$ Кл/м², а области $[0; \alpha]$ – пьезокристалл титаната бария ($BaTiO_3$), для которого $c_{44}^{(2)} = 5,43 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15}^{(2)} = 21,3$ Кл/м². Кривые на фиг.2 и 3 соответствуют однородным цилиндрам, которые изготовлены соответственно из CdS и $BaTiO_3$. Во всех случаях было принято $\alpha = \sqrt{3} \cdot \beta$, $\beta = 2$ рад, $f_1^{(i)}(\theta) \equiv 1$, $f_2^{(i)}(\theta) \equiv 0$. При этом, первым положительным корнем уравнения (6) в случае неоднородного цилиндра будет $\lambda_1 \approx 0,6646331$, а в случае однородных цилиндров – $\lambda_1 = \pi/2(1 + \sqrt{3}) \approx 0,5749513$.

Из приведенных на фиг. 2 и 3 графиков ясно, что в цилиндре, изготовленном из $BaTiO_3$, напряжение $\tau_{\theta z}$ на линии $\theta = 0$ по модулю в 101,4 раза больше, чем в цилиндре из CdS .

Приведенный на фиг. 1 график показывает, что в неоднородном цилиндре напряжение $\tau_{\theta z}$ на линии $\theta = 0$ по модулю, вообще говоря, больше, чем напряжение в цилиндре, изготовленном из $BaTiO_3$, но при приближении к особой точке $r = 0$ эта разница всё уменьшается. Так, например, в точках $r/a = 1, 0,1; 0,01; 10^{-11}$, напряжение $|\tau_{\theta z}(r, 0)|$ в неоднородном цилиндре больше, чем в однородном соответственно в 12,4; 10,1; 8,2; и 1,28 раза.



Обозначим

$$K(\theta) = \begin{cases} -(A_1 \lambda_1 / a) \sin \lambda_1 \alpha, & \theta \in [-\beta; 0] \\ -(A_1 \lambda_1 / a) \sin \lambda_1 \beta, & \theta \in [0; \alpha] \end{cases}$$

$$K_*(\theta) = \begin{cases} \sin \lambda_1 (\beta + \theta), & \theta \in [-\beta; 0] \\ \sin \lambda_1 (\alpha - \theta), & \theta \in [0; \alpha] \end{cases}$$

где $K(\theta)$ — коэффициент особенности напряжения $\tau_{\theta z}(r, \theta)$.

Наибольшее по модулю значения $K(\theta)K_*(\theta)$ достигает в области $[0; \alpha]$ при $\theta \approx 1,1 \text{ рад.} = 63^\circ 1'$. При этом $ac_{44}^{(2)} KK_* / \phi \approx 4,24 \text{ Кл/м}^2$.

В области $[-\beta; 0]$ своего наибольшего значения $|K(\theta)K_*(\theta)|$ достигает при $\theta = 0$. Тогда $ac_{44}^{(2)} KK_* / \phi \approx 3,155 \text{ Кл/м}^2$.

В случае однородного цилиндра наибольшего по модулю значения $K(\theta)K_*(\theta)$ достигает при $\theta \approx 0,732 \text{ рад.} = 41^\circ 56'$. Причем, когда цилиндр изготовлен из CdS , то

$$\frac{ac_{44}}{|\phi|} \max_{[-\beta; \alpha]} |K(\theta)K_*(\theta)| \approx 0,00274 \text{ Кл/м}^2$$

а когда цилиндр изготовлен из $BaTiO_3$, то

$$\frac{ac_{44}}{|\phi|} \max_{[-\beta; \alpha]} |K(\theta)K_*(\theta)| \approx 0,278 \text{ Кл/м}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Галпчян П.В. Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т. 43. № 5. С. 21–25.
2. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Определение особенности связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла при продольном сдвиге // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С.102–108.
3. Galpchian P.V. Electroelastic field behavior in the vicinity of the edge of a piezoelectric body // Intern. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics. 1997. V. 8. P. 243–258.
4. Галпчян П.В. Поведение электроупругого поля в окрестности ребра составного двугранного угла, возникающего при продольном сдвиге // Четвёртое международное совещание-семинар. Инженерно-физические проблемы новой техники: Тез. докл. Москва. 1996. С. 134–135.
5. Саргсян А. М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.49-56.
6. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об особенностях напряжений в двух задачах электроупругости для кусочно-однородного тела // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 40–45.
7. Фильштинский Л.А. Антиплоская деформация составного пьезоэлектрического пространства, ослабленного туннельными трещинами // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 59–68.
8. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1987. 338 с.
9. Галпчян П.В. Граничные задачи антиплоской деформации для цилиндра составленного из различных материалов // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №1. С. 22–27.
10. Баблоян А.А., Бегларян А.Г., Шахвердян Г.Н. Внедрение жёсткого штампа с электродом в пьезокерамическую полуплоскость // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С. 3–10.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
02.07.2001