

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ ГУЛЯЕВА-БЛЮСТЕЙНА
 ПО ПОВЕРХНОСТИ ПЬЕЗОЦИЛИНДРА

Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сенник Н.А.

Գ.Ի.Բարձոկաս, Ա.Ի.Զոբնին, Ն.Ա.Սեննիկ

Գուլյակ-Բլյուստեյնի ալիքի տարածումը պլեզո գլանի ճակերևայրով

Հետազոտվում է գլանի կորուրյան ազդեցությունը Գուլյակ-Բլյուստեյնի ալիքի արագության և գոյության պայմանների վրա: Ենթադրվում է, որ գլանի առանցքը հանդիսանում է վեցերորդ կարգի սիմետրիայի առանցք անիզոտրոպ հասկությունների համար:

D.I.Bardzokas, A.I.Zobnin, N.A.Senik

On Gulyaev-Bleustein Wave Propagation Along the Piezo Cylinder Surface

Исследуется влияние кривизны границы на скорость и условия существования волны Гуляева-Блюстейна в сплошном цилиндре, предполагая, что ось цилиндра является осью шестого порядка, а волна распространяется вдоль паправляющей.

Экспериментально волны такого типа наблюдались впервые авторами работы [1], а теоретический анализ был выполнен в работе [2] на основе уравнений электроупругости. Ниже этот вопрос исследуется методом, предложенным в работе [3], позволяющим более просто получить оценки параметров волны.

В цилиндрической системе координат r, z, θ , вводимой обычным образом, амплитуды смещений и потенциал электрического поля определяются уравнениями [4]

$$(\Delta + \kappa^2)w = 0, \quad (\Delta = \partial^2 / \partial r^2 + \partial / r \partial r + \partial^2 / r^2 \partial \theta^2) \quad (1)$$

$$\Delta \psi = 0, \quad \varphi = e_{15} w / \varepsilon_{11} + \psi \quad (2)$$

$$\kappa^2 = \rho \omega^2 / [c_{44} (1 + k_{15}^2)], \quad k_{15}^2 = e_{15}^2 / (c_{44} \varepsilon_{11})$$

Здесь w и φ – поперечное смещение и потенциал электрического поля, e_{15} , ε_{11} , c_{44} – пьезокоэффициент, диэлектрическая проницаемость и жесткость на сдвиг пьезоэлектрика, ω – частота колебаний.

Представляя смещение в виде

$$w = r^{-1/2} \hat{w}(r, \theta) \quad (3)$$

получим для определения \hat{w} уравнение

$$\hat{w}_{,rr} + 2\hat{w} / (2r)^2 + r^{-2} \hat{w}_{,\theta\theta} + \kappa^2 \hat{w} = 0 \quad (4)$$

В соответствии со схемой метода разделения переменных, представим решение уравнения (4) в форме

$$\hat{w}(r, \theta) = \bar{w}(r)F(\theta), \quad F(\theta) = \exp(\pm i n \theta) \quad (5)$$

что дает уравнение

$$\bar{w}_{,rr} + (\kappa^2 - n_1^2 r^{-2})\bar{w} = 0, \quad n_1 = n^2 - 2^{-2} \quad (6)$$

В (6) введем новую переменную ρ соотношением (R — радиус)

$$r = R - \rho, \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (7)$$

Выполняя замену (7) и пренебрегая величинами $(\rho/R)^N$, $N > 1$ по сравнению с единицей, получим упрощенное уравнение, справедливое у поверхности цилиндра

$$\bar{w}_{,\rho\rho} + (\kappa_1^2 - p^2 \rho a)\bar{w} = 0, \quad \kappa_1^2 = \kappa^2 - p^2, \quad p = n_1/R, \quad a = 2/R \quad (8)$$

Рассмотрим высокочастотные колебания, когда параметр $\delta = 2/(R\kappa)$, характеризующий отношение длины волны к радиусу цилиндра, мал. Вместо угла θ введем координату $x = R\theta$ и будем считать величину n в (5) достаточно большой, так что $n_1 \cong n$, $F \cong \exp(\pm ipx)$. Таким образом, p является волновым числом поверхностной волны, а ее фазовая скорость будет $V_p = \omega/p$.

Определяя новую переменную q соотношением

$$q = p^2(1 - \xi + a\rho)\alpha, \quad \xi = V_p/V, \quad \alpha = (1/p^4 a^2)^{1/3} \quad (9)$$

преобразуем уравнение (8) к виду

$$\bar{w}_{,qq} - q\bar{w} = 0 \quad (10)$$

и сохраняя только убывающее при удалении от поверхности цилиндра решение, из (10) получим

$$\bar{w} = C_1 Ai(q)$$

где C_1 — произвольная постоянная, $Ai(q)$ — функция Эйри [5].

Заметим, что параметр q может быть представлен в форме

$$q = (\xi\delta^2)^{1/3}(1 - \xi + a\rho) \quad (11)$$

если учесть, что $\delta = a/\kappa$, $\xi = (V_p/V) = (\kappa/p)^2$.

Аналогичным образом получим решение уравнения (2)

$$\psi = r^{-1/2} \bar{\psi}(r) F(\theta) \quad (12)$$

где

$$\bar{\psi} = C_2 Ai(q_0), \quad q_0 = (\xi\delta^2)^{-1/3}(1 + a\rho) \quad (13)$$

Для определения произвольных постоянных C_1, C_2 воспользуемся граничными условиями для механических и электрических полей.

Если пренебречь влиянием вакуума, занимающего область $r > R$, то граничные условия при $r = R$ с учетом уравнений состояния для незлектродированного цилиндра со свободной от механических нагрузок поверхностью могут быть представлены в виде ($\rho = 0$)

$$2R\bar{w}_{,\rho} + \bar{w} + d_{1s}(2R\bar{\psi}_{,\rho} + \bar{\psi}) = 0$$

$$2R\bar{\psi}_{,\rho} + \bar{\psi} = 0$$

что позволяет получить дисперсионное уравнение

$$Ai'(q_1) = -(1/4)(\xi\delta^2)^{1/3} Ai(q_1), \quad q_1 = (\xi\delta^2)^{-1/3} \quad (14)$$

где знак (...) обозначает производную функции Эйри по аргументу q .

Отметим, что дисперсионное соотношение (14) совпадает с уравнением для упругого пьезоэлектрического цилиндра [3].

Так как параметр δ по предположению мал, то вместо уравнения (14) может быть рассмотрено приближенное уравнение

$$Ai'(q_1) = 0 \quad (15)$$

первые два корня которого будут

$$q_{10} = 1,02; \quad q_{11} = -3,25 \quad (16)$$

что с учетом выражения для q_1 и приближенного равенства $\xi \cong 1$ дает

$$\xi_0 \cong 1 - q_{10} \delta^{2/3} \quad (17)$$

Таким образом, фазовая скорость поверхностной волны на поверхности цилиндра несколько больше фазовой скорости объемной сдвиговой волны. Используя асимптотические свойства функций Эйри, можно показать, что волна действительно является поверхностной и ограничена слоем толщины $|q_{10}|$.

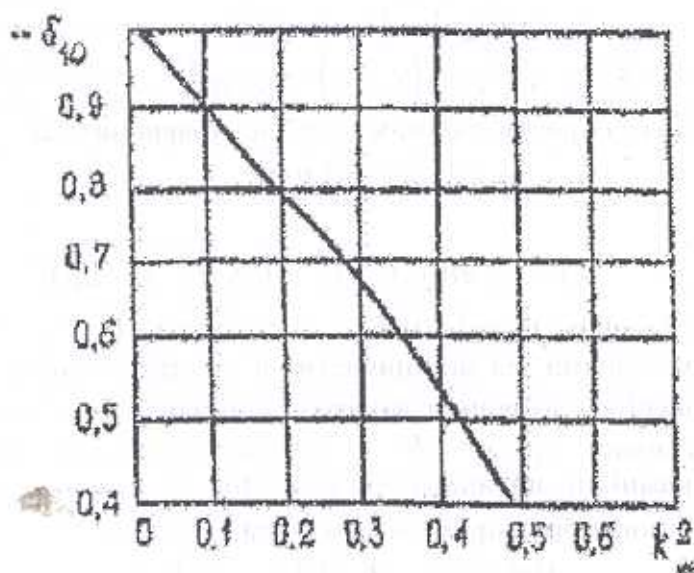
В случае свободной от механических нагрузок электродированной поверхности цилиндра дисперсионное уравнение будет иметь вид

$$Ai(\delta_2)Ai'(\delta_1) - k_*^2 Ai(\delta_1)Ai'(\delta_2) = -(1/4)(\xi\delta^2)^{1/3}(1 - k_*^2) Ai(\delta_2)Ai(\delta_1) \quad (18)$$

$$\delta_1 = (\xi\delta^2)^{-1/3}(1 - \xi), \quad \delta_2 = (\xi\delta^2)^{-1/3}, \quad k_*^2 = k_{15}^2 / (1 + k_{15}^2)$$

При малом значении параметра δ и для $\xi \cong 1$ использование асимптотических формул для функций Эйри позволяет вместо (18) рассмотреть более простое уравнение

$$Ai'(\delta_1) + k_*^2 Ai(\delta_1) = 0 \quad (19)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 представлена зависимость наименьшего корня δ_{10} уравнения (19) от параметра k_*^2 . При $\xi \cong 1$ фазовая скорость определяется приближенным равенством

$$\xi_0 = 1 - \delta_{10} \delta^{2/3} \quad (20)$$

Представленные данные показывают, что наличие поверхностного электрода на границе цилиндра приводит к уменьшению фазовой скорости поверхностной волны по отношению к скорости этой волны в неэлектродированном цилиндре, причем это различие увеличивается с ростом параметра k_* .

Заметим, что как в случае электродированного цилиндра, так и в случае отсутствия электрода, существование поверхностной волны объясняется пьезоэлектрическими свойствами и учетом вакуума, что характерно для волн Гуляева-Блюштейна, а кривизной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васькова В.И., Викторов И.А., Каекина Т.М., Максимов В.Ф., Пятаков П.Я., Талашев А.А. Наблюдение поперечных поверхностных волн на цилиндрической поверхности кристалла //Акуст.ж. 1977. Т.23. №6. С.861-866.
2. Викторов И.А. Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов //Акуст.ж. 1974. Т.20. №2. С.199-206.
3. Бреховских Л.М. О поверхностных волнах в твердом теле //Акуст.ж. 1966. Т.12. №3. С.374-376.
4. Мартыненко В.С., Партон В.З., Сенник Н.А. Возбуждение сдвиговой волны в пьезоэлектрическом цилиндре системой поверхностных электродов //Изв.АН СССР. МТТ. 1988. №3. С.105-110.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. /Под ред. Абрамовица М. и Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.

Афинский национальный
технический университет, Греция

Поступила в редакцию
25.06.2001