ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №4, 2001 Механика

УДК 539.3

О ЗАДАЧАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ (НЕОРТОТРОПНЫХ) ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Григорян Э. Х.

Է.Խ. Գրիգորյան

Անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) սալերի և թաղանթների սեփական տատանումների և կայունության խնդիրների մասին

[1] մենագրությունում դիտարկված են անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) սալերի և թաղանթների սեփական տատանումների և կայունության խնդիրներ: Այդ խնդիրներում նպատակ է դրված որոշել անիզոտրոպիայի ազդեցությունը սեփական հաճախությունների և կրիտիկական ուժերի արժեքների վրա: Վերը նշված խնդիրներում ω-ն (անիզոտրոպ սալերի և թաղանթների սեփական հաճախությունը), P-ն (անիզոտրոպ սալերի և թաղանթների կրիտիկական ուժը) ներկայացված են

$$\omega^2 = \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + \ldots, \quad P = P_0 + \mu P_1 + \mu^2 P_2 + \ldots$$

տեսքով, որտեղ ω_0-ն և P_0-ն համապատասխանաբար հաճախության քառակուսին և կրիտիկական ուժն են օրթոտրոպ սալերի և թաղանթների համար, μ-ն ֆիզիկական փոքր պարամետր է, ω_i, P_i $(i = 1,2,\ldots)$ որոշվում են խնդրի լուծման ընթացքում: [1]-ում որոշված են միայն ω_1-ը և P_1-ը, օգտագործելով սխալ պայման, և հետևաբար սխալ են ստացվել ω_i-երը և P_i-երը: Ճիշտ մոտեցման դեպքում ω_i-երը և P_i-երը ստացվում են հավասար զրոյի, որից հետևում է, որ փաստորեն դրված խնդիրը չի լուծված:

Ներկա աշխատանքում նպատակ է դրվում ապացուցել վերը նշված պնդումները ինչպես նաև լուծել դրված խնդիրները, այսինքն որոշել ω^2 և P հաջորդ մոտավորությունները (ω_2 և P_2 որոշելը):

E.Kh. Grigoryan

On the Own Vibrations and Stability Problems for Anisotropic (Nonorthotropic) Plates and Shells

В монографии [1] рассматриваются задачи собственных колебаний и устойчивости для анизотропных (неортотропных) пластин и оболочек. В этих задачах целью ставится определение эффекта анизотропии на значения собственных частот и на значения критической силы. В указанных выше задачах ω (частота собственных колебаний анизотропных пластин и оболочек), P (критическая сила для анизотропных пластин и оболочек) представлены в виде

$$\omega^2 = \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + \ldots, \quad P = P_0 + \mu P_1 + \mu^2 P_2 + \ldots$$

где ω_0 и P_0 – соответственно квадрат частоты и критическая сила для ортотропных пластин и оболочек, μ – физический малый параметр, ω_i, P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ определяются при решении задач. В [1] определены только ω_1 и P_1, используя ошибочное условие, и следовательно, ошибочными оказались и ω_1 и P_1. При правильном подходе ω_1 и P_1 получаются равными нулю, из которого следует, что фактически поставленные задачи не решены.

В настоящей работе целью ставятся доказательства вышеуказанных утверждений, а также решение поставленных задач, т. е. определение следующих приближений в выражениях ω^2 и P (определение ω_2 и P_2). Конкретно будет рассматриваться задача о собственных колебаниях прямоугольной анизотропной (неортотропной) пластинки. Полученные здесь результаты будут иметь место и в вышеуказанных задачах собственных колебаний, и устойчивости, в котором нетрудно убедиться [1].

Определение частот собственных колебаний прямоугольной пластинки с размерами $a \times b$, изготовленной из анизотропного материала (материал пластинки в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельной срединной плоскости пластинки) в [1], при граничных условиях шарнирного опирания, сводится к решению краевой задачи

$$A_1 w + \mu A_2 w - \omega^2 \frac{h\gamma_0}{g} w = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &w = 0, \quad M_x = 0 \ \text{при} \ x = 0, \ x = a \\ &w = 0, \quad M_y = 0 \ \text{при} \ y = 0, \ y = b \end{aligned} \tag{2}$$

где γ_0, h - соответственно удельный вес и толщина пластинки, g- ускорение свободного падения, ω - частота колебаний, w - прогиб точек пластинки,

$$M_x = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$M_y = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$A_1 = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2k \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \ x = \alpha \sqrt[4]{D_{11}}, \ y = \beta \sqrt[4]{D_{22}}$$

$$A_2 = 4\left(k_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + k_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} \right), \ k_2 = \lambda k_1, \ k_1 = \frac{\sqrt{D_{66}}}{\sqrt[4]{D_{11} D_{22}}}$$

$$\mu = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11} D_{66}}}, \ \mu' = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{22} D_{66}}}, \ \mu' = \lambda \mu, \ k = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}$$

D_{ij} – жесткости анизотропной пластинки.

Далее, считая по-видимому, что w и ω^2 при достаточно малых μ являются аналитическими функциями от μ, представлены в виде степенных рядов

$$\omega^2 = \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega_2 + \ldots \tag{3}$$

$$w = w_0 + \mu w_1 + \mu^2 w_2 + \ldots \tag{4}$$

Подставляя (3), (4) в (1), (2), получены рекуррентные краевые задачи

$$A_1 w_0 - \frac{h\gamma_0}{g} \omega_0 w_0 = 0 \tag{5}$$

$$w_0=0,\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha^2}=0 \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ \alpha=a_1 \tag{6}$$

$$w_0=0,\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2}=0 \quad \text{при} \ \beta=0,\ \beta=b_1$$

$$A_1 w_1-\frac{h\gamma_0}{g}\omega_0 w_1=-A_2 w_0+\frac{h\gamma_0}{g}\omega_1 w_0 \tag{7}$$

$$w_1=0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha^2}=-2k_1\frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha\,\partial\beta} \quad \text{при} \quad \alpha=0;\ \alpha=a_1 \tag{8}$$

$$w_1=0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial\beta^2}=-2k_2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\alpha\,\partial\beta} \quad \text{при} \ \beta=0,\ \beta=b_1$$

$$A_1 w_2-\frac{h\gamma_0}{g}\omega_0 w_2=-A_2 w_1+\frac{h\gamma_0}{g}\omega_1 w_1+\frac{h\gamma_0}{g}\omega_2 w_0 \tag{9}$$

$$w_2=0,\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial\alpha^2}=-2k_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} \quad \text{при} \quad \alpha=0,\ \alpha=a_1 \tag{10}$$

$$w_2=0,\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial\beta^2}=-2k_2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} \quad \text{при} \ \beta=0,\beta=b_1$$

и т. д.

Метод приведения краевой задачи (1), (2) к решению групп краевых задач встречается в теории возмущений [2].

В монографии [1] ставится задача определения ω_1. Для этого отмечается, что

$$w_0=A_{mn}\sin\frac{m\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{n\pi\beta}{b_1} \tag{11}$$

− решение граничной задачи (5), (6), т. е. является собственной функцией оператора A_1 при однородных граничных условиях, соответствующей собственному значению

$$\lambda_{mn}=\frac{h\gamma_0}{g}\omega_0(m,n)=\left(\frac{m\pi}{a_1}\right)^4+2k\left(\frac{m\pi}{a_1}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^4$$

Далее, имея в виду (11), для определения w_1 получено уравнение

$$A_1 w_1-\frac{h\gamma_0}{g}\omega_0 w_1=Q_{mn}\cos\frac{m\pi\alpha}{a_1}\cos\frac{n\pi\beta}{b_1}+\omega_1 b_{mn}\sin\frac{m\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{n\pi\beta}{b_1} \tag{12}$$

при условии (8). Здесь

$$Q_{mn}=A_{mn}\frac{4\pi^4 mn}{a_1 b_1}\left(\frac{k_1 m^2}{a_1^2}+\frac{k_2 n^2}{b_1^2}\right),\qquad b_{mn}=\frac{h\gamma_0}{g}A_{mn}$$

Заметим, что общее решение краевой задачи (12), (8) имеет вид

$$w_1=C\,w_0+\mathrm{v} \tag{13}$$

где C - произвольная постоянная, а v является решением краевой задачи (12), (8).

Далее, после определения v (в [1] вместо v используется буква w_1) ω_1 определяется из условия

$$\int_0^{a_1}\int_0^{b_1} \mathrm{v}\, w_0^* \, d\alpha\, d\beta = 0 \tag{14}$$

где w_0^* – нормированная собственная функция

$$w_0^* = \frac{2}{\sqrt{a_1 b_1}} \sin\frac{m\pi\alpha}{a_1} \sin\frac{n\pi\beta}{b_1} \tag{15}$$

Ввиду громоздкости выражение ω_1 здесь не приводится. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения (3) в [1], определено приближенное значение искомой ω^2

$$\omega^2 = \omega_0 + \mu\,\omega_1(m,n)$$

Теперь покажем, что принятый в [1] подход для определения $\omega_1(m,n)$, ошибочный. Действительно, условие (14), во первых, может и не выполняться, а во-вторых, оно не зависит от ω_1. Для этого посмотрим, откуда взялось условие (14). В разложении w (4) полагается, что $(w, w_0) = (w_0, w_0)$, т. е.

$$\int_0^{a_1}\int_0^{b_1} w\, w_0 \, d\alpha\, d\beta = \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} w_0^2 \, d\alpha\, d\beta$$

после чего из (4) получается

$$\mu(w_1, w_0) + \mu^2(w_2, w_0) + \ldots = 0$$

Отсюда следует, что $(w_1, w_0) = (w_2, w_0) = \ldots = 0$, где $w_1, w_2, \ldots$ – общие решения соответствующих краевых задач [2]. В настоящем случае общим решением краевой задачи (12), (8) является w_1 (13), а не v, и поэтому условие (14) может не выполняться, потому что

$$(C + \mathrm{v},\, w_0) = 0$$

а не $(\mathrm{v}, w_0) = 0$. С другой стороны, как видели выше, условия ортогональности не зависят от ω_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, (14) не может определить ω_1, если даже оно выполнялось. Вот почему ω_1 определяется ошибочно. Ниже мы покажем, что $\omega_1 = 0$.

Решение задачи. Введем скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} \varphi(\alpha,\beta)\,\psi(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

где φ и ψ принадлежат $L_2(\Omega)$, $\Omega = \{0 \le \alpha \le a_1\,,\ 0 \le \beta \le b_1\}$. Тогда, в дальнейшем под w_0 будем понимать нормированную собственную функцию w_0^* (15).

$$(A_1 w_1, w_0) = \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} A_1 w_1(\alpha,\beta) w_0(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta \qquad (16)$$

После интегрирования по частям (16), при этом имея в виду граничные условия (8), легко убедиться, что

$$(A_1 w_1, w_0) = (w_1, A_1 w_0) = \frac{h\gamma_0}{g}\,\omega_0 (w_1, w_0) \qquad (17)$$

Далее, умножив обе части уравнения (12) скалярно на w_0 и имея в виду (17), для определения ω_1, получим равенство

$$\left(Q_{mn} \cos\frac{m\pi\alpha}{a_1}\cos\frac{n\pi\beta}{b_1} + \omega_1 b_{mn} \sin\frac{m\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{n\pi\beta}{b_1},\ w_0 \right) = 0$$

которое может иметь место только при $\omega_1 = 0$.

Таким образом, мы доказали вышеприведенные утверждения о том, что в [1] частоты и критические силы соответствующих задач определены ошибочно.

Далее, поскольку оказалось $\omega_1 = 0$, надо определить хоть ω_2. Из условия разрешимости краевой задачи (9), (10) (здесь надо учитывать, что $\omega_1 = 0$)

$$\left(-A_2 w_1 + \frac{h\gamma_0}{g}\,\omega_2 w_0,\ w_0 \right) = 0$$

определяется ω_2

$$\omega_2 = \frac{g}{h\gamma_0}\left(A_2 w_1, w_0\right)$$

Значит, надо определить w_1. Для этого, в (12) поставим $\omega_1 = 0$ и определим w_1

$$w_1 = A w_0 + \widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2 \qquad (18)$$

где A – пока произвольная постоянная, $\widetilde{w}_1$ – решение однородного уравнения (12) с граничными условиями (8), а $\widetilde{w}_2$ – решение уравнения (12) с нулевыми граничными условиями, ортогональное к w_0. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что

$$\widetilde{w}_1 = \sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(A_p \operatorname{ch}\frac{p\pi s_1\alpha}{b_1} + B_p \operatorname{shh}\frac{p\pi s_1\alpha}{b_1} + C_p \operatorname{ch}\frac{p\pi s_2\alpha}{b_1} + D_p \operatorname{sh}\frac{p\pi s_2\alpha}{b_1}\right)\sin\frac{p\pi\beta}{b_1} + \right.$$

$$\left. + \left(\overline{A}_p \operatorname{ch}\frac{p\pi r_1\beta}{a_1} + \overline{B}_p \operatorname{sh}\frac{p\pi r_1\beta}{a_1} + \overline{C}_p \operatorname{ch}\frac{p\pi r_2\beta}{a_1} + \overline{D}_p \operatorname{sh}\frac{p\pi r_2\beta}{a_1}\right)\sin\frac{p\pi\alpha}{a_1}\right]$$

где

$$A_p = \frac{4k_1\pi^2 mn}{a_1 b_1\sqrt{a_1 b_1}}\cdot\frac{a_{np}}{\left(s_2^2 - s_1^2\right)\left(p\pi/b_1\right)^2}, \qquad C_p = -A_p$$

$$B_p = -A_p\left(\operatorname{sh}\frac{p\pi s_1 a_1}{b_1}\right)^{-1}\left(\operatorname{ch}\frac{p\pi s_1 a_1}{b_1} - \cos m\pi\right)$$

$$D_p = A_p\left(\operatorname{sh}\frac{p\pi s_2 a_1}{b_1}\right)^{-1}\left(\operatorname{ch}\frac{p\pi s_2 a_1}{b_1} - \cos m\pi\right), \quad a_{nn} = 0$$

$$a_{np} = \frac{2}{b_1}\int_0^{b_1}\cos\frac{n\pi\beta}{b_1}\sin\frac{p\pi\beta}{b_1}d\beta = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2[\pi(p+n)/2]}{p+n} + \frac{\sin^2[\pi(p-n)/2]}{p-n}\right)$$

$$\overline{A}_p = \frac{4k_2\pi^2 mn}{a_1 b_1\sqrt{a_1 b_1}}\cdot\frac{b_{mp}}{(r_2^2 - r_1^2)(p\pi/a_1)^2}, \qquad \overline{C}_p = -\overline{A}_p$$

$$\overline{B}_p = -\overline{A}_p\left(\operatorname{sh}\frac{p\pi r_1 b_1}{a_1}\right)^{-1}\left(\operatorname{ch}\frac{p\pi r_1 b_1}{a_1} - \cos n\pi\right)$$

$$\overline{D}_p = \overline{A}_p\left(\operatorname{sh}\frac{p\pi r_2 b_1}{a_1}\right)^{-1}\left(\operatorname{ch}\frac{p\pi r_2 b_1}{a_1} - \cos n\pi\right), \quad b_{mm} = 0$$

$$b_{mp} = \frac{2}{a_1}\int_0^{a_1}\cos\frac{m\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{p\pi\alpha}{a_1}d\alpha = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2[\pi(p+m)/2]}{p+m} + \frac{\sin^2[\pi(p-m)/2]}{p-m}\right)$$

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \quad \overline{A}_m = \overline{B}_m = \overline{C}_m = \overline{D}_m = 0$$

s_i, r_i $(i = 1, 2)$ являются корнями уравнений [1]

$$s^4 - 2ks^2 + \left[1 - \frac{h\gamma_0}{g}\omega_0(m,n)\left(\frac{b_1}{p\pi}\right)^4\right] = 0$$

$$r^4 - 2kr^2 + \left[1 - \frac{h\gamma_0}{g}\omega_0(m,n)\left(\frac{a_1}{p\pi}\right)^4\right] = 0$$

$$s_1^2 = k + \sqrt{\Delta_1}, \; s_2^2 = k - \sqrt{\Delta_1}, \; r_1^2 = k + \sqrt{\Delta_2}, \; r_2^2 = k - \sqrt{\Delta_2}$$

$$\Delta_1 = k^2 + \left(\frac{mb_1}{pa_1}\right)^4 + 2k\left(\frac{mb_1}{pa_1}\right)^2\left(\frac{n}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{p}\right)^4 - 1$$

$$\Delta_2 = k^2 + \left(\frac{na_1}{pb_1}\right)^4 + 2k\left(\frac{na_1}{pb_1}\right)^2\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{m}{p}\right)^4 - 1$$

$$\widetilde{w}_2 = \frac{16\pi^2}{a_1 b_1} z_{mn}\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{pq}}{\lambda_{pq} - \lambda_{mn}}\psi_{pq}, \qquad \Gamma_{mn} = 0$$

где

$$z_{mn} = mn\left(k_1\left(\frac{m}{a_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{n}{b_1}\right)^2\right)$$

$$\Gamma_{pq}=\left[\frac{\sin^2[\pi(p+m)/2]}{p+m}+\frac{\sin^2[\pi(p-m)/2]}{p-m}\right]\cdot\left[\frac{\sin^2[\pi(q+n)/2]}{q+n}+\frac{\sin^2[\pi(q-n)/2]}{q-n}\right]$$

$$\lambda_{pq}=\left(\frac{p\pi}{a_1}\right)^4+2k\left(\frac{p\pi}{a_1}\right)^2\left(\frac{q\pi}{b_1}\right)^2+\left(\frac{q\pi}{b_1}\right)^4, \quad \lambda_{mn}=\frac{h\gamma_0}{g}\omega_0(m,n)$$

$$\psi_{pq}=\frac{2}{\sqrt{a_1b_1}}\sin\frac{p\pi\alpha}{a_1}\sin\frac{q\pi\beta}{b_1}$$

Выше имелось в виду, что ψ_{pq} – ортонормированные собственные функции оператора A_1 с нулевыми граничными условиями, соответствующие собственным значениям λ_{pq}.

Очевидно, что $\widetilde{w}_1$ и $\widetilde{w}_2$ ортогональны к w_0.

Таким образом, решение краевой задачи (12), (8), ортогональное к w_0, будет (в (18) надо положить $A=0$)

$$w=\widetilde{w}_1+\widetilde{w}_2.$$

Следовательно,

$$\omega_2=\frac{g}{h\gamma_0}\left[\left(A_2\widetilde{w}_1,w_0\right)+\left(A_2\widetilde{w}_2,w_0\right)\right]$$

Если учесть, что

$$A_2\widetilde{w}_1=\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[u_{1p}\left(A_p\,\mathrm{sh}\frac{p\pi s_1\alpha}{b_1}+B_p\,\mathrm{ch}\frac{p\pi s_1\alpha}{b_1}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+u_{2p}\left(C_p\,\mathrm{sh}\frac{p\pi s_2\alpha}{b_1}+D_p\,\mathrm{ch}\frac{p\pi s_2\alpha}{b_1}\right)\right]\cos\frac{p\pi\beta}{b_1}+$$

$$\left.+\left[\bar{u}_{1p}\left(\bar{A}_p\mathrm{sh}\frac{p\pi r_1\beta}{a_1}+\bar{B}_p\mathrm{ch}\frac{p\pi r_1\beta}{a_1}\right)+\bar{u}_{2p}\left(\bar{C}_p\mathrm{sh}\frac{p\pi r_2\beta}{a_1}+\bar{D}_p\,\mathrm{ch}\frac{p\pi r_2\beta}{a_1}\right)\right]\cos\frac{p\pi\alpha}{a_1}\right\}$$

где

$$A_n=B_n=C_n=D_n=\bar{A}_m=\bar{B}_m=\bar{C}_m=\bar{D}_m=0$$

$$u_{1p}=4\left(\frac{\pi}{b_1}\right)^4 n\,p\,s_1\left(k_1(ps_1)^2+k_2n^2\right), u_{2p}=4\left(\frac{\pi}{b_1}\right)^4 n\,p\,s_2\left(k_1(ps_2)^2+k_2n^2\right)$$

$$\bar{u}_{1p}=4\left(\frac{\pi}{a_1}\right)^4 m\,p\,r_1\left(k_1(pr_1)^2+k_2m^2\right), \bar{u}_{2p}=4\left(\frac{\pi}{a_1}\right)^4 m\,p\,r_2\left(k_1(pr_2)^2+k_2m^2\right)$$

$$A_2\widetilde{w}_2=-\frac{2^6\pi^6}{a_1^2b_1^2}z_{mn}\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{pq}z_{pq}}{\lambda_{pq}-\lambda_{mn}}\cos\frac{p\pi\alpha}{a_1}\cos\frac{q\pi\beta}{b_1}$$

для $\omega_2(m,n)$, получим

$$\omega_2(m,n)=\frac{g}{h\gamma_0}\frac{2^8\pi^3}{a_1b_1\sqrt{a_1b_1}}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\left[K_p\left(\frac{\sin^4[\pi(p-n)/2]}{(p-n)^2}-\frac{\sin^4[\pi(p+n)/2]}{(p+n)^2}\right)+\right.\right.$$

$$+\bar{K}_p\left(\frac{\sin^4[\pi(p-m)/2]}{(p-m)^2}-\frac{\sin^4[\pi(p+m)/2]}{(p+m)^2}\right)\Bigg]\frac{1}{p}-\frac{\pi}{2}z_{mn}\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{R_{pq}z_{pq}}{\lambda_{pq}-\lambda_{mn}}\Bigg\}$$

где

$$K_p=m^2n^2\left[\frac{\left(\operatorname{cth}(p\pi s_1a_1/b_1)-\cos m\pi\left(\operatorname{sh}(p\pi s_1a_1/b_1)\right)^{-1}\right)w_p^{(1)}}{(ps_1)^2+(mb_1/a_1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\operatorname{cth}(p\pi s_2a_1/b_1)-\cos m\pi\left(\operatorname{sh}(p\pi s_2a_1/b_1)\right)^{-1}\right)w_p^{(2)}}{(ps_2)^2+(mb_1/a_1)^2}\right]$$

$$w_p^{(1)}=\frac{k_1s_1\left(k_1(ps_1)^2+k_2n^2\right)}{a_1(s_2^2-s_1^2)},\ w_p^{(2)}=\frac{k_1s_2\left(k_1(ps_2)^2+k_2n^2\right)}{a_1(s_2^2-s_1^2)}$$

$$\bar{K}_p=m^2n^2\left[\frac{\left(\operatorname{cth}(p\pi r_1b_1/a_1)-\cos n\pi\left(\operatorname{sh}(p\pi r_1b_1/a_1)\right)^{-1}\right)\bar{w}_p^{(1)}}{(pr_1)^2+(na_1/b_1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\operatorname{cth}(p\pi r_2b_1/a_1)-\cos n\pi\left(\operatorname{sh}(p\pi r_2b_1/a_1)\right)^{-1}\right)\bar{w}_p^{(2)}}{(pr_2)^2+(na_1/b_1)^2}\right]$$

$$\bar{w}_p^{(1)}=\frac{k_2r_1\left(k_1(pr_1)^2+k_2m^2\right)}{b_1(r_2^2-r_1^2)},\ \bar{w}_p^{(2)}=\frac{k_2r_2\left(k_1(pr_2)^2+k_2m^2\right)}{b_1(r_2^2-r_1^2)},\ R_{mn}=0$$

$$R_{pq}=\left(\frac{\sin^4[\pi(p-m)/2]}{(p-m)^2}-\frac{\sin^4[\pi(p+m)/2]}{(p+m)^2}\right)\cdot\left(\frac{\sin^4[\pi(q-n)/2]}{(q-n)^2}-\frac{\sin^4[\pi(q+n)/2]}{(q+n)^2}\right)$$

Из представления $\omega_2(m,n)$ следуют следующие случаи:

а) если m и n четные, то

$$\omega_2(m,n)=\frac{g}{h\gamma_0}\frac{2^{10}\pi^3}{a_1b_1\sqrt{a_1b_1}}\left[\sum_{p=1,3,5..}^{\infty}\left(\frac{nK_p}{(p^2-n^2)^2}+\frac{m\bar{K}_p}{(p^2-m^2)^2}\right)-\right.$$

$$\left.-2\pi mnz_{mn}\sum_{p,q=1,3,5..}^{\infty}\frac{pqz_{pq}}{(p^2-m^2)^2(q^2-n^2)^2(\lambda_{pq}-\lambda_{mn})}\right]$$

б) если m нечетное, а n четное, то

$$\omega_2(m,n)=\frac{g}{h\gamma_0}\frac{2^{10}\pi^3}{a_1b_1\sqrt{a_1b_1}}\left[\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{nK_p}{(p^2-n^2)^2}+\sum_{p=2,4}^{\infty}\frac{m\bar{K}_p}{(p^2-m^2)^2}-\right.$$

$$\left.-2\pi mnz_{mn}\sum_{p=2,4,}^{\infty}\sum_{q=1,3,5}^{\infty}\frac{pqz_{pq}}{(p^2-m^2)^2(q^2-n^2)^2(\lambda_{pq}-\lambda_{mn})}\right]$$

в) если m - четное, а n - нечетное, то

$$\omega_2(m,n)=\frac{g}{h\gamma_0}\frac{2^{10}\pi^3}{a_1b_1\sqrt{a_1b_1}}\left[\sum_{p=2,4,..}^{\infty}\frac{nK_p}{(p^2-n^2)^2}+\sum_{p=1,3,..}^{\infty}\frac{m\bar{K}_p}{(p^2-m^2)^2}-\right.$$

$$\left.-2\pi mnz_{mn}\sum_{p=1,3,..}^{\infty}\sum_{q=2,4,..}^{\infty}\frac{pqz_{pq}}{(p^2-m^2)^2(q^2-n^2)^2(\lambda_{pq}-\lambda_{mn})}\right],$$

г) если m и n нечетные, то

$$\omega_2(m,n)=\frac{g}{h\gamma_0}\frac{2^{10}\pi^3}{a_1b_1\sqrt{a_1b_1}}\left[\sum_{p=2,4,..}^{\infty}\left(\frac{nK_p}{(p^2-n^2)^2}+\frac{m\bar{K}_p}{(p^2-m^2)^2}\right)-\right.$$

$$\left.-2\pi mnz_{mn}\sum_{p=2,4,..}^{\infty}\sum_{q=2,4,..}^{\infty}\frac{pqz_{pq}}{(p^2-m^2)^2(q^2-n^2)^2(\lambda_{pq}-\lambda_{mn})}\right]$$

Итак, мы определили формально (поскольку сходимость степенных рядов по μ не исследовали) влияние анизотропии на частоту и форму колебаний прямоугольной пластинки в виде

$$\omega^2=\omega_0+\mu^2\omega_2, \qquad w=w_0+\mu w_1,$$

где ω^2 определена с точностью до второго приближения, а w – до первого приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. ЕГУ, 1976.
2. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
25.06.2001