ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №3, 2001 Механика

УДК 531.36:534.1

УСЛОВИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖУЩИХСЯ КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Матвийчук К.С.

Կ.Ս. Մատվիյչուկ
Հեղուկի հոսքի հետ փոխազդող շարժվող կոնտինուալ համակարգերի համար տեխնիկական կայունության պայմանները

Լյապունովի տեխնիկական կայունության և առաձգականության տեսության մեթոդներով հետազոտված են տարածական ոչ գծային դինամիկական համակարգերի փոխազդեցության հարցերը շարժվող հեղուկի հոսքում: Ստացված են այսպիսի դինամիկական համակարգերի շարժման տեխնիկական կայունության բավարար պայմաններ:

K.S. Matvijchuk
Condition of Technical Stability of Moving Continuum Systems, Interacting with Fluid Flow

Развит подход исследования нелинейных многомерных динамических процессов взаимодействия с потоком жидкости движущихся протяженных континуальных систем с помощью методов пространственной теории упругости совместно с методом сравнения и прямым методом Ляпунова. На этой основе получены различные по внутреннему содержанию обобщенные системы нелинейных уравнений, описывающие заданные континуальные процессы. Сформулированы достаточные условия технической устойчивости соответствующей пространственной несамосопряженной краевой задачи, с помощью которой характеризуется динамическое поведение исследуемых систем в потоке жидкости.

Получены критерии технической устойчивости пространственных динамических состояний длинных упругих цилиндрических тел балочного типа с переменным сечением при их продольном движении с заданной скоростью в потоке жидкости. Найдены условия, при которых наступает потеря устойчивости заданного пространственного динамического процесса. Представленные исследования опираются на результаты из [1–14].

1. Постановка задачи. Уравнения движения процесса. Рассматривается длинное упругое цилиндрическое тело AB с переменным поперечным сечением, продольная ось которого в начальном состоянии является прямолинейной [1–5] и которое продольно транспортируется в идеальной несжимаемой жидкости в течение заданного интервала времени $I_1 = [t_0, K] \subset I \equiv [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, $K = \mathrm{const} > 0$ вдоль горизонтальной прямолинейной траектории с заданной скоростью v, v — ее абсолютное значение. Заданный динамический процесс характеризуется следующей системой уравнений, записанной относительно внутренних усилий и моментов AB:

$$m(\varepsilon)\frac{\partial^2 W_1}{\partial\tau^2}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)Q_1\right]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\alpha_2 Q_2)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\alpha_3 Q_3)+$$
$$+\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)R_1+\alpha_2 R_2+\alpha_3 R_3$$
$$m(\varepsilon)\frac{\partial^2 W_2}{\partial\tau^2}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[(1+\beta_2)Q_2]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}Q_1\right)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\beta_3 Q_3)+$$
$$+\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}R_1+(1+\beta_2)R_2+\beta_3 R_3$$
$$m(\varepsilon)\frac{\partial^2 W_3}{\partial\tau^2}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[(1+\beta_2)Q_3]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}Q_1\right)-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\beta_3 Q_2)+$$
$$+\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}R_1-\beta_3 R_2+(1+\beta_2)R_3 \qquad (1)$$
$$\rho\frac{\partial l_1^0}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)M_1\right]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\alpha_2 M_2)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\alpha_3 M_3)+\alpha_3 Q_3-$$
$$-\alpha_2 Q_3+\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)\overline{\mu}_1+\alpha_2\overline{\mu}_2+\alpha_3\overline{\mu}_3$$
$$\rho\frac{\partial l_2^0}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[(1+\beta_2)M_2]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}M_1\right)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\beta_3 M_3)+\beta_3 Q_2-$$
$$-(1+\beta_2)Q_3+\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}\overline{\mu}_1+(1+\beta_2)\overline{\mu}_2+\beta_3\overline{\mu}_3$$
$$\rho\frac{\partial l_3^0}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[(1+\beta_2)M_3]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}M_1\right)-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\beta_3 M_2)+(1+\beta_2)Q_2+$$
$$+\beta_3 Q_3+\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}\overline{\mu}_1-\beta_3\overline{\mu}_2+(1+\beta_2)\overline{\mu}_3$$
$$l_i^0=J_i\omega_i,\ i=1,2,3;\ \overline{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$$

Соотношения для внутренних усилий $Q_i^{(1)}$ и моментов M_i $(i=1,2,3)$ через перемещения точек осевой линии системы AB [1 – 5] имеют вид:

$$Q_1^{(1)}=\frac{ES(\varepsilon)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\langle(1-\nu)\left\{\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial\varepsilon}\right)^2+\left(\frac{\partial W_3}{\partial\varepsilon}\right)^2\right]\right\}+\right.$$
$$\left.+\beta_2+\frac{1}{2}\left(\beta_2^2+\beta_3^2\right)\right\rangle$$

$$Q_2^{(1)} = S(\varepsilon)G\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon}\right)\alpha_2 + (1+\beta_2)\frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon} - \beta_3 \frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon}\right]$$

$$Q_3^{(1)} = S(\varepsilon)G\left[\left(1+\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon}\right)\alpha_3 + (1+\beta_2)\frac{\partial W_3}{\partial \varepsilon} - \beta_3 \frac{\partial W_2}{\partial \varepsilon}\right] \qquad (2)$$

$$M_1 = -GI_p\left[(1+\beta_2)\frac{\partial \beta_3}{\partial \varepsilon} - \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial \varepsilon}\right]$$

$$M_2 = \frac{(1-\nu)EI_2}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\beta_2)\frac{\partial^2 W_3}{\partial \varepsilon^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2}\right]$$

$$M_3 = -\frac{(1-\nu)EI_3}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1+\beta_2)\frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varepsilon^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varepsilon^2}\right] \qquad (3)$$

$I_p = \int\limits_S (\eta^2 + \zeta^2)d\eta d\zeta$ – полярный момент инерции; $I_2 = \int\limits_S \zeta^2 d\eta d\zeta$ – момент инерции поперечного сечения тела AB относительно оси e_2, $I_3 = \int\limits_S \eta^2 d\eta d\zeta$ – момент инерции поперечного сечения тела AB относительно оси e_3. Из (1) находим безразмерную краевую задачу в перемещениях процесса продольного транспортирования в жидкости на заданной глубине длинного упругого тела с переменным поперечным сечением:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - P_H^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - P_H^{(2)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3\frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - P_H^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}\right) + b_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3\frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3$$

с граничными условиями

$$u_i(t,s)\big|_{s=0} = 0,\ i = 1,2,3, \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\Big|_{s=1} = -c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\Big|_{s=1} + c_2,\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}\Big|_{s=1} = 0,\ \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^2}\Big|_{s=1} = n\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\Big|_{s=1} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\Big|_{s=1} = n_1(g\rho_{Æ}V_\pi - q_\pi),\ \frac{\partial^3 u_3}{\partial s^3}\Big|_{s=1} = n_2\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\Big|_{s=1} - n_3(g\rho_{Æ}V_\pi - q_\pi)$$

и начальными условиями

$$u_i(t,s)\big|_{t=t_0} = k_i(s), \quad \frac{\partial u_i(t,s)}{\partial s}\Big|_{t=t_0} = g_i(s) \quad i=1,2,3 \tag{6}$$

$$P_H^{(1)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{1}{En_0}, \quad P_H^{(2)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{S_0 l^2}{EI_3\delta}, \quad P_H^{(3)} = P_H \frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{S_0 l^2}{EI_3\delta}$$

$$\alpha_1 = \frac{S_0 n_0 lh}{I_3}, \quad \alpha_2 = \frac{S_0 lh}{I_3}, \quad \alpha_3 = \frac{l^3 R_1}{EI_3\delta}, \quad b_1 = \frac{S_0 n_0 lh}{I_2}, \quad b_2 = \frac{S_0 lh}{I_2}$$

$$b_3 = \frac{l^3 R_1}{EI_2\delta}, \quad f_1 = \frac{l^2 R_1}{ES_0 n_0 h\delta}, \quad f_2 = \frac{l^4 R_2}{EI_3 h\delta}, \quad f_3 = \frac{l^4 R_3}{EI_2 h\delta}, \quad R_1 = \Omega - q_1 - F_1$$

$$R_2 = q_2 + F_2, \quad R_3 = P_A - P_m + q_3 + F_3, \quad \delta = (1-\nu)\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]^{-1}$$

$$F_i = F_{ic} + F_{ip} \quad i=1,2,3, \quad c_1 = \frac{q_\pi l}{\delta g T^2 ES_B}, \quad c_2 = \frac{R_1 l}{\delta EhS_B}, \quad n = \frac{q_\pi l^3}{\delta g T^2 I_{3B}}$$

$$n_1 = \frac{l^2 h\xi_C}{\delta EI_{2B}h}, \quad n_2 = \frac{q_\pi l^3}{\delta g T^2 I_{2B}}, \quad n_3 = \frac{l^3}{\delta EI_{2B}h}.$$

T — некоторый характерный промежуток времени для тела Π. Величины с индексом B соответствуют поперечному сечению заданной системы в точке B. Предполагаем, что при выбранных функциях $g_i(s)$, $k_i(s)$, $i=1,2,3$, которые удовлетворяют нужным условиям согласования на границе тела AB, для краевой задачи (4) — (6) существует однозначное решение в классе непрерывных по t, s функций, имеющих непрерывные производные по t, s необходимого порядка [6, 9 — 13].

В случае вязкой среды уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - \left(P_H^{(1)} + \widetilde{w}_1^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s} + f_1 \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} - \left(P_H^{(2)} + \widetilde{w}_2^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + \\
&\quad + a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s} + a_3\frac{\partial u_2}{\partial s} + f_2 \\
\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^4 u_3}{\partial s^4} - \left(P_H^{(3)} + \widetilde{w}_3^2\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + b_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}\right) + \\
&\quad + b_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s} + b_3\frac{\partial u_3}{\partial s} + f_3
\end{aligned} \tag{7}$$

с краевыми условиями типа (5), (6). Здесь имеем

$$\widetilde{w}_1 = w_1 / \sqrt{ES_0 n\delta}, \quad \widetilde{w}_2 = w_2 l / \sqrt{EI_3\delta}, \quad \widetilde{w}_3 = w_3 l / \sqrt{EI_2\delta}$$

2.Условия технической устойчивости динамических состояний взаимодействующего с потоком жидкости длинного упругого тела. Рассмотрим векторный функционал вида

$$V[u_1,u_2,u_3,t]=\{V_1[u_1,t],V_2[u_2,t],V_3[u_3,t]\} \tag{8}$$

$$V_1[u_1,t]=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2-(\widetilde{\mathrm{v}}_1+\widetilde{F}_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right]ds$$

$$V_2[u_2,t]=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}\right)^2-(\widetilde{\mathrm{v}}_2+\widetilde{F}_2)\left(\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2\right]ds$$

$$V_3[u_3,t]=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}\right)^2-(\widetilde{\mathrm{v}}_3+\widetilde{F}_3)\left(\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right]ds$$

$$\widetilde{\mathrm{v}}_1=\sup_{s,t}\left(\frac{m\mathrm{v}l^2}{c^2h}\right),\ \widetilde{\mathrm{v}}_2=\sup_{s,t}\left(\frac{m\mathrm{v}l^3}{\delta EI_3}\right),\ \widetilde{\mathrm{v}}_3=\sup_{s,t}\left(\frac{m\mathrm{v}l^3}{\delta EI_2}\right)$$

$$\widetilde{F}_k=\sup_{s,t}\left(P_h^{(k)}+f_k\right),\ c^2=\delta ES$$

Введем в рассмотрение, соответствующую процессу, векторную меру

$$\rho(u)=\{\rho_1(u_1),\rho_2(u_2),\rho_3(u_3)\},\ \ \rho_1(u_1)=\sup_s(u_1)^2+\int_0^1\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\right]ds$$

$$\rho_j(u_j)=\sup_s(u_j)^2+\sup_s\left(\frac{\partial u_j}{\partial s}\right)^2+\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)^2\right]ds,\ j=2,3 \tag{9}$$

Для компонент вектор-функции (8) при неотрицательных величинах $[1-(\widetilde{\mathrm{v}}_k+\widetilde{F}_k)]$, $k=1,2,3$ справедливы оценки снизу

$$V_1[u_1,t]\geq\frac{1}{2}[1-(\widetilde{\mathrm{v}}_1+\widetilde{F}_1)]\rho_1(u_1),\ \ V_i[u_i,t]\geq\frac{1}{3}[1-(\widetilde{\mathrm{v}}_i+\widetilde{F}_i)]\rho_i(u_i)\quad i=1,2 \tag{10}$$

Согласно (10) функционалы $V_k[u_k,t]$ (8) являются положительно-определенными относительно меры $\rho(u)$ (9) при выполнении условий

$$0\leq\widetilde{\mathrm{v}}_k+\widetilde{F}_k<1,\quad k=1,2,3 \tag{11}$$

Величины $\mu_k=1-(\widetilde{\mathrm{v}}_k+\widetilde{F}_k)$, $k=1,2,3$ имеют смысл малого положительного параметра: $\mu_k\in(0,1]$. Пусть I_1 для процесса (4) – (6) равно:

$$I_1=[t_0,L\overline{\mu}^{-1}],\ \ \overline{\mu}^{-1}=\max\{\mu_1^{-1},\mu_2^{-1},\mu_3^{-1}\},\ K\equiv L\overline{\mu}_1^{-1},\ \ L=\mathrm{const}>0$$

Определение технической устойчивости аналогично [10,13].

Полная производная по t от V (8) в силу (4) – (6) равна:

$$\frac{dV_1[u_1,t]}{dt}=2\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}(t,1)\left[c_2-c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(t,1)\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left[(\widetilde{\nu}_1+\widetilde{F}_1)\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial s}+\left(P_H^{(1)}\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}-n_0^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial n_0}{\partial s}-f_1\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}\right]ds\right\}$$

$$\frac{dV_2[u_2,t]}{dt}=-2n\frac{\partial u_2}{\partial t}(t,1)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(t,1)+2\int_0^1\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t}\left[a_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}-\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)-\right.\right. \tag{12}$$

$$\left.\left.-P_H^{(2)}\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}+a_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}+a_3\frac{\partial u_2}{\partial s}+f_2\right]-(\widetilde{\nu}_2+\widetilde{F}_2)\frac{\partial u_2}{\partial s}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial s}\right\}ds$$

$$\frac{dV_3[u_3,t]}{dt}=2\left[\left(n_1\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial s}(t,1)+n_3\frac{\partial u_3}{\partial t}(t,1)\right)(g\rho_{ж}V_{п}-q_{п})-n_2\frac{\partial u_3}{\partial t}(t,1)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}(t,1)\right]+$$

$$+2\int_0^1\left\{\frac{\partial u_3}{\partial t}\left[b_1\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}-\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)-P_H^{(3)}\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2}+b_2\frac{\partial n_0}{\partial s}\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_3}{\partial s}+b_3\frac{\partial u_3}{\partial s}+f_3\right]-\right.$$

$$\left.-(\widetilde{\nu}_3+\widetilde{F}_3)\frac{\partial u_3}{\partial s}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial s}\right\}ds$$

Выражения (12) справа обозначим соответственно $M_1(t,\lambda_1)$, $M_2(t,\lambda_2)$, $M_3(t,\lambda_3)$, $\lambda_1=(c_1,c_2,\widetilde{\nu}_1,\widetilde{F}_1,P_H^{(1)},f_1)$, $\lambda_2=(n,a_1,a_2,a_3,\widetilde{\nu}_2,\widetilde{F}_2,P_H^{(2)},f_2)$, $\lambda_3=(n_1,n_2,n_3,b_1,b_2,b_3,\widetilde{\nu}_3,\widetilde{F}_3,P_H^{(3)},f_3)$.

Рассмотрим вдоль решения $u_i(t,s)$, $i=1,2,3$ задачи (4) – (6) функции

$$\overline{\Phi}_1(t,\lambda_1)=M_1(t,\lambda_1)-\frac{\mu_1}{2(\mu_1+t)^2}\rho_1(u_1(t,s))$$

$$\overline{\Phi}_i(t,\lambda_i)=M_i(t,\lambda_i)-\frac{\mu_i}{3(\mu_i+t)^2}\rho_i(u_i(t,s))\quad i=2,3 \tag{13}$$

Теорема 1. Пусть справедливы следующие условия: 1. Краевая задача (4) – (6) в I_1 имеет однозначное решение с вышеуказанными свойствами. 2. Для заданных функционалов $V_i[u_i(t,s),t]$, $i=1,2,3$ справедливы условия

$$0<\widetilde{\nu}_i+\widetilde{F}_i<1\quad i=1,2,3 \tag{14}$$

3. В области I_1 заданы и существуют неотрицательные интегрируемые функции $\Phi_i(t)$ $i=1,2,3$ переменного t, для которых вдоль решения $u_i(t,s)$, $i=1,2,3$ системы (4) – (6) справедливы неравенства

$$\left|\overline{\Phi}_i(t,\lambda_i)\right| \le \Phi_i(t), \quad i=1,2,3, \quad t \in I_1 \tag{15}$$

4. В области $G = \{t, y_i, \mu_i : t \in I_1, |y_i| < +\infty, \mu_i \in (0,1), i-1,2,3\}$ при условиях (6) для трехмерной задачи Коши сравнения

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{(\mu_i + t)^2}[y_i + \sigma_i(t)], \ \sigma_i(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_i(\overline{\tau})d\overline{\tau}, \ i=1,2,3, \quad t \in I_1 \tag{16}$$

$$y_i(t) = y_i^0 \ge V_i[u_i^0(s), t_0], \ y_i^0 \le b_i, \quad i=1,2,3, \quad t_0 \in I_1 \tag{17}$$

существует единственное непрерывное решение

$y(t) = \{y_1(t,t_0,y_1^0), y_2(t,t_0,y_2^0), y_3(t,t_0,y_3^0)\}$

$$y_i(t,t_0,y_i^0) = \exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right]\int_{t_0}^{t} \exp\left[\frac{1}{\mu_i + \overline{\tau}}\right]\Phi_i(\overline{\tau})d\overline{\tau} + \tag{18}$$

$$+ y_i^0 \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right]\exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right] - \sigma_i(t), \quad i=1,2,3$$

5. Выполняется система неравенств

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_i(\overline{\tau})\exp\left[\frac{1}{\mu_i + \overline{\tau}}\right]d\overline{\tau} \le M_i(\mu_i + L\overline{\mu}^{-1})^2\left\{\exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right] - \right. \tag{19}$$

$\left. - \exp\left[\frac{1}{\mu_i + L\overline{\mu}^{-1}}\right]\right\}, \quad t_0, t \in I_1, \quad i=1,2,3, \quad M_i = \text{const} > 0$ наперед заданы.

Тогда динамический процесс $(4)-(6)$ технически устойчив относительно векторной меры $\rho(u)$ при $\forall t \in I_1$.

Доказательство. Из условий $1-3$ теоремы 1 для (12) находим

$$\frac{dV_i[u_i(t,s),t]}{dt} \le \frac{1}{(\mu_i + t)^2}V_i[u_i(t,s),t] + \overline{\Phi}_i(t,\lambda_i), \ i=1,2,3 \tag{20}$$

При решении задачи $(4)-(6)$ при (14), (15) рассматриваем систему функций

$$z_i(t) = V_i[u_i(t,s),t] - \sigma_i(t), \quad i=1,2,3 \tag{21}$$

Оценки (20) порождают систему неравенств

$$\frac{dz_i(t)}{dt} \le \frac{1}{(\mu_i + t)^2}[z_i(t), \sigma_i(t)], \quad i=1,2,3 \tag{22}$$

Из (22) следует система сравнения (16), (17). Из [14] имеем

$$z_i(t) \le y_i(t,t_0,y_i^0), \ i=1,2,3, \ t \in I_1 \tag{23}$$

Из (23) для компонент V_i, $i=1,2,3$ (20) находим

$$V_i[u_i(t,s),t] \le y_i(t,t_0,y_i^0) + \sigma_i(t), \ i=1,2,3, \ t \in I_1 \tag{24}$$

Из (24) вдоль решения краевой задачи $(4)-(6)$ получаем

$$V_i[u_i(t,s),t] \le P_i(t), \quad P_i(t) \equiv \exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right]\int_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu_i + \bar{\tau}}\right]\Phi_i(\bar{\tau})d\bar{\tau} + \tag{25}$$

$$+ b_i \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right], \; t_0, t \in I_1, \; i = 1,2,3$$

При условии 5 теоремы 1 находим систему оценок

$$P_i(t) \le C_i, \; C_i \equiv \left[M_i\left(\mu_i + L\bar{\mu}^{-1}\right)^2 + b_i\right]\exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right], \; t_0, t \in I_1, \; i = 1,2,3 \tag{26}$$

Из (17), (25), (26) следует справедливость утверждения теоремы 1.

Теорема 2. Пусть условия 1 – 4 теоремы 1 справедливы в любом промежутке $I_1 \subseteq I$ и выполняются неравенства

$$\exp\left[-\frac{1}{\mu_i + t}\right] \ge \int_{t_0}^{t}\exp\left[\frac{1}{\mu_i + \bar{\tau}}\right]\Phi_i(\bar{\tau})d\bar{\tau}, \; \forall I_1 \subseteq I, \; (\mu_i + L\bar{\mu}^{-1})^2 \ge 1, \; i = 1,2,3 \tag{27}$$

Тогда исходный динамический процесс (4) – (6) технически устойчив по мере $\rho(u)$ в области I. Доказательство теоремы 2 подобно доказательству теоремы 1, так как

$$P_i(t) \le b_i \exp\left[\frac{1}{\mu_i + t_0}\right] + 1 \le C_i, \; t_0, t \in I, \; i = 1,2,3$$

Теорема 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 2 в 1 имеем

$$\lim_{t \to +\infty}[y_i(t, t_0, y_i^0) + \sigma_i(t)] = 0, \; i = 1,2,3 \tag{28}$$

Тогда динамический процесс (4) – (6) асимптотически технически устойчив относительно меры $\rho(u)$.

Сформулированные условия технической устойчивости процесса (4) – (6) нарушаются, если выполняются неравенства

$$\tilde{\nabla}_i + F_i \ge 1, \; i = 1,2,3 \tag{29}$$

Исходный процесс будет технически неустойчивым на конечном и бесконечном интервале времени, если соответственно в этих областях мажоранты $P_i(t)$ в (25) удовлетворяют условиям

$$P_i(t) \to \infty, \; i = 1,2,3 \tag{30}$$

В частности, условие (30) выполняется при $t_0 = 0$ и произвольных $t \ge 0$, когда $\mu_i \to 0, i = 1,2,3$. Как следует из определения величин μ_i, это возможно при стремлении скорости v движения упругого тела AB в жидкости к некоторому своему критическому значению $v_{кр}$; аналогичное относится к скорости движения жидкости и к внешним силам, действующим на заданное упругое тело, или эти все названные величины возрастают одновременно. Критическая скорость $v_{кр}$ движения упругого тела в идеальной жидкости определяется при помощи неравенств (29) и равна следующей величине:

$$v_{\text{êð}} = \left[3ES_0 n_0 h I_2 I_3 \delta - I_2 I_3 \left(l^2 R_1 + S_0 h \delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - S_0 n_0 I_2 \left(l^4 R_2 + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - \right.$$

$$\left. - S_0 n_0 I_3 \left(l^4 R_3 + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) \right] [ml^2 (I_2 I_3 + l S_0 n_0 h I_2 + l S_0 n_0 h I_3)]^{-1} \qquad (31)$$

Легко убедиться, что теоремы 1—3 справедливы в случае процессов (7), (5), (6) при учете взаимодействия системы с вязкой жидкостью. В потоке вязкой жидкости для $v_{кр}$ имеем

$$v_{\text{êð}} = \left[3ES_0 n_0 h I_2 I_3 \delta - I_2 I_3 \left(l^2 R_1 + w_1^2 h + S_0 h \delta P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - \right.$$

$$\left. - S_0 n_0 I_2 \left(l^4 R_2 + w_2^2 l^2 h + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) - S_0 n_0 I_3 \left(l^4 R_3 + w_3^2 l^2 h + S_0 h l^2 P_H \frac{\partial n_0}{\partial s} \right) \times \right]$$

$$\times [ml^2 (I_2 I_3 + l S_0 n_0 h I_2 + l S_0 n_0 h I_3)]^{-1} \qquad (32)$$

Из (31), (32) следует явная зависимость критической скорости $v_{кр}$ движения упругого тела AB в потоке жидкости от других основных параметров исходного процесса. Изменение последних тянет за собой соответствующие изменения критической скорости движения системы в движущейся жидкости. Аналогичным путем найдем критические значения других параметров исследуемого процесса. Следовательно, при движении длинного упругого тела переменного сечения в потоке жидкости со скоростью, не превышающей критического значения $v_{кр}$, определяемого согласно (31) или (32), динамический процесс (4)—(6) или (7), (5), (6) является технически устойчивым согласно приведенным определениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
3. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформированных тел. Киев: Наукова думка, 1971. 276 с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Наука, 1976. 416 с.
5. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
6. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем //ПММ. 1959. 23. №3. С.483−494.
7. Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения //МТТ. 1975. №6. С.15−24.
8. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
9. Матвийчук К.С. Определение условий технической устойчивости параметрически возбуждаемых распределенных систем //Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №3. С.23−32.
10. Матвийчук К.С. Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов //ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.210−218.
11. Матвийчук К.С. Техническая теория устойчивости параметрически возбуждаемых панелей в газовом потоке //Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №4. С.122−131.
12. Матвийчук К.С. Условия технической устойчивости управляемых процессов с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. 1998. №2. С.84−93.
13. Матвийчук К.С. Техническая устойчивость прямолинейного трубопровода с транспортируемой жидкостью // ПМ. 1989. Т.25. №5. С.97−102.
14. Szarski J. Differential inegualities–Warszawa: PWN, 1967. 256 p.

Институт механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины

Поступила в редацию
19.04.2000