

УДК 539.3

ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ
КЛИНА С ЗАЩЕMLЕННЫМИ КРАЯМИ

Геворгян Г.В., Задоян М.А.

В работе исследуются местные поля напряжений и деформаций в окрестности угловой точки защемленного упрочняемого многоклина при продольном сдвиге. Полученные системы трансцендентных уравнений дают возможность вычислительными методами получить характерный для описания состояния параметр λ , зависящий от физических и геометрических параметров составляющих клиньев. При обратной постановке получаются поверхности конечно-напряженных состояний в пространстве геометрических и физических многообразий конструкции многоклина, отделяющие малонапряженные состояния от концентрационных.

Գ.Վ. Գևորգյան, Մ.Ա. Զադոյան

Ամրակցված եզրերով բաղադրյալ ամրապնդվող սեպը երկայնական սահբերի դեպքում

Աստիճանային օրենքով ամրապնդվող բաղադրիչներով ամրակցված եզրերով սեպի անկյունային կետի շրջակայքում ուսումնասիրվում է տեղայնական լարումների դաշտը: Ստացվում է տրանսցենդենտ հավասարումների համակարգ, որից որոշվում է լարումների դաշտը բնութագրող λ պարամետրը կախված բաղադրիչների երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերից:

G.V. Gevorgyan, M.A. Zadoyan

The Strength of the Multi-Wedge with Fastened Boundaries under the Longitudinal Shear

Постановка задачи и исходные уравнения

Рассматривается напряженное состояние при продольном сдвиге в окрестности угловой точки составного тела, изготовленного из клиновидных n призм, материалы которых упрочняются по степенному закону:

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m$$

где σ_0 и ε_0 – интенсивности напряжений и деформаций, параметр m для всех материалов считается одинаковым, а модуль деформации k – различным. Внешние края клина заделаны, т.е. предполагается, что в окрестности угловой точки продольные перемещения равны нулю: $w = 0$. Углы при вершинах составляющих клиньев обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, причём принимается

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad A_0 = 0 \quad (\text{фиг.1}).$$

В каждом i -ом составляющем клине имеем уравнение равновесия:

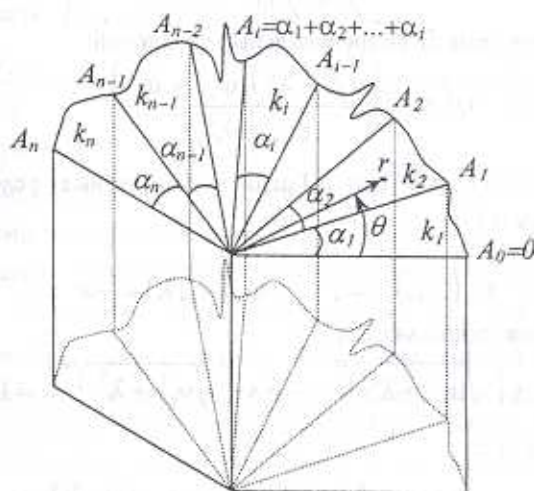
$$\frac{\partial \tau_{ci}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{ci}}{r} = 0 \quad (1)$$

соотношения между компонентами напряжения и деформации, между деформациями и перемещениями будут:

$$\begin{aligned} \tau_{ri} &= 2k_i \varepsilon_0^{m-1} \gamma_{ri}, & \tau_{\theta i} &= 2k_i \varepsilon_0^{m-1} \gamma_{\theta i} \\ 2\gamma_{ri} &= \frac{\partial w_i}{\partial r}, & 2\gamma_{\theta i} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

Интенсивности напряжения и деформации выражаются:

$$\sigma_{0i} = \sqrt{\tau_{\theta i}^2 + \tau_{ri}^2}, \quad \varepsilon_{0i} = \sqrt{\left(\frac{\partial w_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta}\right)^2}$$



Фиг. 1.

Представление решения

В каждом i -ом клине решение представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{ri} &= \lambda k_i r^{(\lambda-1)m} f_i \chi_i, & \tau_{\theta i} &= k_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i \\ w_i &= r^\lambda f_i, & \chi_i &= \left(\sqrt{f_i'^2 + \lambda^2 f_i^2}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

причём $i=1,2,\dots,n$, а $f_i = f_i(\theta, \lambda)$ и λ — неизвестные функции и параметр, играющие роль собственной функции и собственного значения.

Подставляя эти решения для компонентов напряжений (2) в уравнения (1), приходим к системе уравнений:

$$(f_i' \chi_i)' + \eta f_i \chi_i = 0, \quad \eta = \lambda[1 + (\lambda-1)m] \quad (3)$$

где $i=1,2,\dots,n$.

Для защемлённых краёв будем иметь условия:

$$f_i(0, \lambda) = f_n(A_n, \lambda) = 0 \quad (4)$$

На контактных поверхностях имеем условия непрерывности напряжений τ_{θ} и

w_i :

(1)

$$\begin{aligned}
 f'_i \chi_i &= \delta_i f'_{i+1} \chi_{i+1}, \\
 f_i &= f_{i+1}, \quad \text{при } \vartheta = A_i \\
 \delta_i &= \frac{k_{i+1}}{k_i},
 \end{aligned} \tag{5}$$

причём $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Вводя функцию $\psi_i(\vartheta, \lambda)$ -

$$f'_i = f_i \psi_i \tag{6}$$

из (3) приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\psi'_i = - \frac{(\psi_i^2 + \lambda^2)(\psi_i^2 + \omega^2)}{\psi_i^2 + \lambda^2 p} \tag{7}$$

где $\omega^2 = \lambda(\lambda + p - 1)$, $p = 1/m$. Гранично-контактные условия для системы уравнений (7) являются на:

внешних краях -

$$\psi_1(0, \lambda) = \infty, \quad \psi_n(A_n, \lambda) = -\infty \tag{8}$$

контактных поверхностях из (5) -

$$\mu_i \left(\sqrt{\mu_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} - \delta_i \nu_i \left(\sqrt{\nu_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} = 0 \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$ и -

$$\mu_i = \psi_i(A_i, \lambda), \quad \nu_i = \psi_{i+1}(A_i, \lambda)$$

Решения уравнений (7) представляются в следующей форме:

$$\operatorname{arctg} \frac{\psi_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\psi_i}{\omega} = H_i - \vartheta \tag{10}$$

где H_i - произвольные постоянные, $i = 1, 2, \dots, n$.

Используя условия (8), находим:

$$H_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right), \quad H_n = A_n - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right).$$

Таким образом, для крайних составляющих клиньев будем иметь:

$$\operatorname{arctg} \frac{\psi_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq A_1 = \alpha_1 \tag{11}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\psi_n}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\psi_n}{\omega} = A_n - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \vartheta, \quad A_{n-1} \leq \vartheta \leq A_n \tag{12}$$

Остальные постоянные H_2, H_3, \dots, H_{n-1} остаются неизвестными. Подставляя в (11) $\vartheta = A_1$ и в (12) $\vartheta = A_{n-1}$, имеем:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\omega} &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \alpha_1 \\
 \operatorname{arctg} \frac{\nu_{n-1}}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\nu_{n-1}}{\omega} &= \alpha_n - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Далее используя решение (10) для i -го клина, принимая в нём $\vartheta = A_{i-1}$, а затем $\vartheta = A_i$, получим:

$$\operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} = H_i - A_i, \quad (14)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\omega} = H_i - A_{i-1}$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Исключая отсюда H_i , находим:

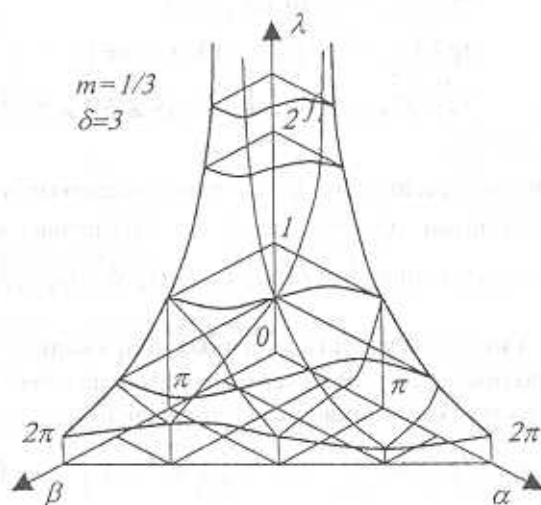
$$\operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\nu_{i-1}}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\omega} \right) = \alpha_i, \quad (15)$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Таким образом, (9), (13) и (15) составляют систему из $2n-1$ уравнений с $2n-1$ неизвестными постоянными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}, \lambda$, последний из которых в принципе есть собственное значение, определяемое как:

$$\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m)$$

Оно в $(2n+1)$ -мерном пространстве геометрических и физических параметров представляет гиперповерхность, определяющая напряженное состояние в окрестности угловой точки рассматриваемого составного клина. На фиг. 2 приведена поверхность $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta = 3, m = 1/3)$ для 2-составного клина, построенная вычислительным методом.



Фиг. 2

Определение системы функций f

Интегрируя дифференциальное уравнение (6) для i -го клина находим:

$$f_i = D_i \exp \left(\int_{A_{i-1}}^{\vartheta} \psi_i d\vartheta \right), \quad A_{i-1} \leq \vartheta \leq A_i$$

причём $i = 1, 2, \dots, n$, а D_i – произвольные постоянные.

Далее, используя условия непрерывности на контактных поверхностях, получим:

$$D_i = D_1 \exp \left(\sum_{j=1}^{i-1} \int_{A_{j-1}}^{A_j} \psi_j d\vartheta \right)$$

где $i = 2, 3, \dots, n$. Постоянная $D_1 = f_1(0)$ остаётся неизвестным.

Линейно-упругие материалы

Полагая $m = 1$, из (9) получим:

$$\mu_i = \delta_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (16)$$

Далее, из (13) находим:

$$\mu_i = \lambda \operatorname{ctg} \lambda \alpha_i, \quad v_{n-1} = -\lambda \operatorname{ctg} \lambda \alpha_n \quad (17)$$

Полагая в (15) $m = 1$, имеем:

$$\operatorname{arctg} \frac{v_{i-1}}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_i}{\lambda} = \lambda \alpha_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (18)$$

Вводя новые неизвестные постоянные φ_i –

$$v_{i-1} = \lambda \operatorname{tg} \lambda \varphi_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (19)$$

из (17) получим:

$$\mu_i = \lambda \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i - \alpha_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (20)$$

Используя контактные условия (16), для выражений μ_i и v_i получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \lambda \alpha_1 - \delta_1 \operatorname{tg} \lambda \varphi_2 &= 0 \\ \operatorname{tg} \lambda (\varphi_i - \alpha_i) - \delta_i \operatorname{tg} \lambda \varphi_{i+1} &= 0 \\ \operatorname{tg} \lambda (\varphi_{n-1} - \alpha_{n-1}) + \delta_{n-1} \operatorname{ctg} \lambda \alpha_n &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-2$.

Полученная система состоит из $n-1$ трансцендентных уравнений с $n-1$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}, \lambda$. Исключив $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$, в принципе, приходим к уравнению $\lambda = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})$.

Гиперповерхность конечных напряжений

Для рассматриваемых упрочняющихся материалов, полагая $\lambda = 1$, условия на контактных поверхностях (9) принимают следующий вид:

$$\mu_i \left(\sqrt{\mu_i^2 + 1} \right)^{m-1} - \delta_i v_i \left(\sqrt{v_i^2 + 1} \right)^{m-1} = 0 \quad (22)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Уравнения (13) при $\lambda = 1$ дают:

$$\mu_i = \operatorname{ctg} \alpha_i, \quad v_{n-1} = -\operatorname{ctg} \alpha_n$$

Соответственно из (15) имеем:

$$\operatorname{arctg} v_{i-1} - \operatorname{arctg} \mu_i = \alpha_i$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-1$. Откуда, используя обозначения (19), получим:

$$\mu_i = \operatorname{tg}(\varphi_i - \alpha_i), \quad v_{i-1} = \operatorname{tg} \varphi_i$$

Тогда система контактных условий (22) преобразуется в следующую форму:

$$\operatorname{ctg} \alpha_i |\sin \alpha_i|^{1-m} - \delta_i \operatorname{tg} \varphi_2 |\cos \varphi_2|^{1-m} = 0$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_i - \alpha_i) |\cos(\varphi_i - \alpha_i)|^{1-m} - \delta_i \operatorname{tg} \varphi_{i+1} |\cos \varphi_{i+1}|^{1-m} = 0 \quad (23)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{n-1} - \alpha_{n-1}) |\cos(\varphi_{n-1} - \alpha_{n-1})|^{1-m} + \delta_{n-1} \operatorname{ctg} \alpha_n |\sin \alpha_n|^{1-m} = 0$$

причём $i = 2, 3, \dots, n-2$. Полученная система имеет $n-1$ уравнений с $n-2$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$. Исключив эти постоянные, приходим в $2n$ -мерном пространстве геометрических и физических параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m$ к гиперповерхности конечных напряжений:

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m) = 1$$

отделяющую зону малонапряжённости от зоны сильных концентраций напряжений.

Случай трёхсоставного клина

Система уравнений при $n = 3$ будет:

из контактных условий:

$$\mu_i \left(\sqrt{\mu_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} - \delta_i v_i \left(\sqrt{v_i^2 + \lambda^2} \right)^{m-1} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

причём μ_i и v_i определяются из следующих уравнений:

$$\operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\mu_1}{\omega} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right) - \alpha \quad (25)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{v_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{v_2}{\omega} = \gamma - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1-\lambda}{\omega} \right)$$

следующих из (13), полагая в нём $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_3 = \gamma$, а также уравнения:

$$\operatorname{arctg} \frac{v_1}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\lambda} + \frac{1-\lambda}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{v_1}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_2}{\omega} \right) = \beta \quad (26)$$

следующее из (15), полагая в нём $\alpha_2 = \beta$.

Приведённая система уравнений (24)-(26), содержащая неизвестные постоянные $\mu_1, \mu_2, v_1, v_2, \lambda$, определяет искомый параметр λ -

$$\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, m)$$

Для однородного клина, т.е. при $\delta_1 = \delta_2 = 1$, полагая в (24) $\mu_i = v_i$, из (25)-(26) получим:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \left(1 + \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+p-1)}} \right)$$

Обозначая $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi s$, имеем:

$$\lambda = \frac{2 + (p-1)(1-2s)^2 + (1-2s)\sqrt{4p + (p-1)^2(1-2s)^2}}{8s(1-s)}$$

Для однородного клина поверхность малонапряженности $\lambda = 1$, отделяющая зону конечных напряжений от зоны концентраций напряжений, будет плоскость $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Плоскость отсекает от координатных осей α, β, γ отрезки, равные π .

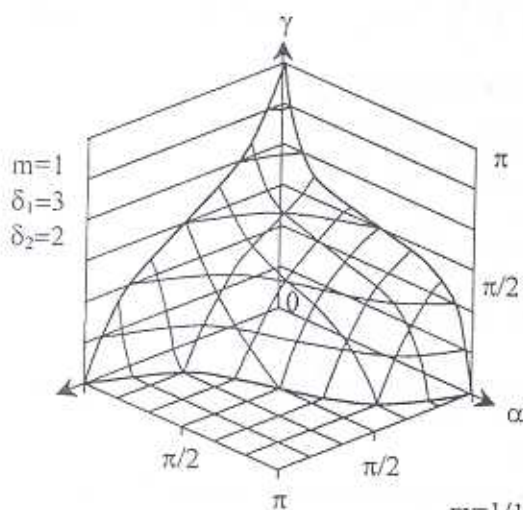
Полагая $\lambda = 1$, из системы уравнения (23) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha |\sin \alpha|^{1-m} - \delta_1 \operatorname{tg} \varphi |\cos \varphi|^{1-m} &= 0 \\ \operatorname{tg}(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta)^{1-m} + \delta_2 \operatorname{ctg} \gamma |\sin \gamma|^{1-m} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

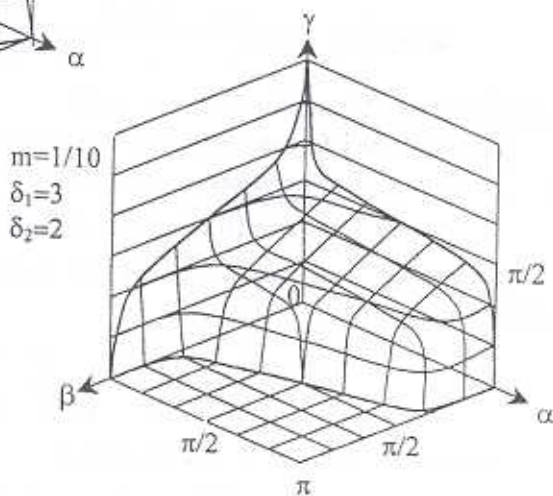
где обозначено $\varphi_2 = \varphi$. Исключив отсюда φ , приходим к уравнению гиперповерхности конечных напряжений, отделяющей зону малонапряженности от зоны концентрации напряжений. На фиг. 3-4 в координатном пространстве $\alpha\beta\gamma$ представлены поверхности конечных напряжений (27) при разных δ_1, δ_2 и m .

Для линейно-упругих материалов, полагая $m = 1$, из (24)-(26) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \lambda \alpha - \delta_1 \operatorname{tg} \lambda \varphi &= 0 \\ \operatorname{tg} \lambda(\varphi - \beta) + \delta_2 \operatorname{ctg} \lambda \gamma &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Далее, исключив из этой системы $\operatorname{tg} \lambda \varphi$, получим трансцендентное уравнение относительно λ –

$$\operatorname{ctg} \lambda \alpha \operatorname{ctg} \lambda \beta + \delta_2 \operatorname{ctg} \lambda \alpha \operatorname{ctg} \lambda \gamma + \delta_1 \delta_2 \operatorname{ctg} \lambda \beta \operatorname{ctg} \lambda \gamma - \delta_1 = 0$$

В частном случае, когда $\alpha = \beta = \gamma$, находим:

$$\operatorname{tg}^2 \lambda \alpha = \frac{1}{\delta_1} (1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2)$$

или же

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \delta_1 \delta_2 + \delta_2}{\delta_1}} \quad (28)$$

При $\delta_1 \rightarrow \infty$, т.е. когда материал второго клина (β) слишком сильный, чем материал первого клина (α), получим:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \sqrt{\delta_2}$$

Далее, если материал третьего клина (γ) слишком сильный, чем материал второго клина (β), то принимая $\delta_2 \rightarrow \infty$, находим $\lambda = \frac{\pi}{2\alpha}$.

Полагая в (28) $\lambda = 1$, получим предельное значение угла:

$$\alpha_* = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \delta_1 \delta_2 + \delta_2}{\delta_1}}$$

обеспечивающее малонапряжённое состояние в окрестности угловой точки рассматриваемого составного клина. В случае полубесконечной щели в (28) следует положить $\alpha = 2\pi/3$.

Проблема малонапряжённости для случая двух составляющих линейно-упругих разнородных клиньев впервые исследована в [1]. В случае нелинейно-упрочняющихся материалов такие задачи рассмотрены в [2-4].

Литература

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1987. 338с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384с.
3. Геворгян Г.В., Задоян М.А. Малонапряжённость многоклина при смешанных краевых условиях. Информация, Технологии и Управление, 4 // Мат. межд. конфер. «Прикл. и Математ. аспекты Естествознания», «Ноян Тапан», Ереван, 1999. 195с.
4. Задоян М.А. Условие малонапряжённости составного клина из нелинейно-упругих материалов // ПММ. 2000 Вып. 3. С.444-453.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
21.03.2001