ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №3, 2001 Механика

УДК 539. 3

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Гнуни В. Ц., Элоян А.В.

Վ.Ց. Գնունի, Ա.Վ. Էլոյան

Ուղղանկյուն սալի ծռման խնդրում հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրությունը

Դիտարկվում է առաձգական իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի հենարանների դիրքի օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որը ապահովում է սալի ամենամեծ ճկվածքի ամենափոքր արժեքը:

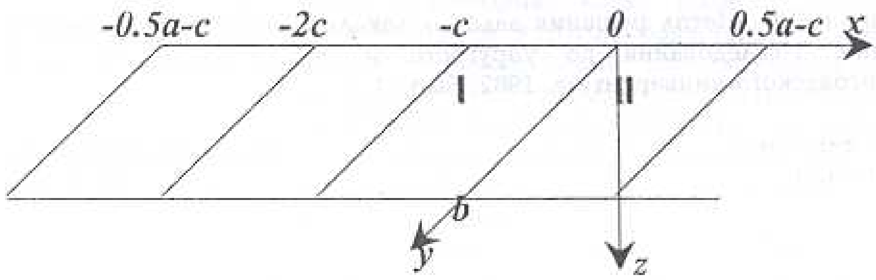
V.Ts.Gnuny, A.V. Eloyan

Optimal choice of the supports place in the problem of the rectungular plate bending

Рассматривается задача нахождения оптимального расположения опор по длине упругой, изотропной, прмоугольной пластинки, обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба пластинки.

1. В работе [1] рассматриваются вопросы оптимального выбора расположения опор в задачах жесткости, прочности, устойчивости и колебаний упругой балки.

Пусть прямоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к прямоугольной системе декартовых координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки. По длине пластинки опоры расположены на расстоянии c от середины пластинки (фиг.1).



Фиг. 1

Уравнение изгиба пластинки представляется в виде [2]

$$D\Delta^2 w = q \tag{1.1}$$

где $w = w(x, y)$ — прогиб, $q = q(x, y)$ — нормально приложенная нагрузка, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ — жесткость на изгиб, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластинки.

При предположении свободного опирания краев пластинки $y = 0; b$, прогиб $w(x, y)$ и нагрузку $q(x, y)$ можно представить в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)\sin\mu_n y,\ q(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)\sin\mu_n y$$

$$q_n(x)=\frac{2}{b}\int_0^b q(x,y)\sin\mu_n y dy,\ (\mu_n=\pi n/b) \tag{1.2}$$

и из уравнения (1.1) для определения искомых функций $w_n(x)$ получается уравнение

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4}-2\mu_n^2\frac{d^2 w_n}{dx^2}+\mu_n^4 w_n=q_n(x) \tag{1.3}$$

Если нагрузка по длине пластинки распределена симметрично, то можно рассматривать уравнение (1.3) лишь на отрезке $[-c; 0.5a-c]$ с обеспечением условий симметрии

$$\frac{dw_n}{dx}=0,\ \frac{d^3 w_n}{dx^3}=0 \text{ при } x=-c \tag{1.4}$$

Отметим, что при произвольном распределении нагрузки по длине, задачу оптимизации необходимо рассматривать с двумя параметрами оптимизации c_1 и c_2.

Обозначим

$$w_n(x)=\begin{cases} w_{1n}(x) & \text{при } -c\le x<0 \\ w_{2n}(x) & \text{при } 0<x\le 0.5a-c \end{cases} \tag{1.5}$$

при этом должны удовлетворяться следующие условия сопряжения на опоре $x=0$:

$$w_{1n}(0)=w_{2n}(0)=0,\ \left.\frac{\partial w_{1n}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$M_{11}^{(1)}(0)=M_{11}^{(2)}(0)\Rightarrow\left.\frac{\partial^2 w_{1n}}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial x^2}\right|_{x=0} \tag{1.6}$$

а при $x=0.5a-c$ – условия свободного края

$$M_{11}^{(2)}=-D\left(\frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=0.5a-c}=0$$

$$\widetilde{T}_{13}^{(2)}=T_{13}^{(2)}-\frac{\partial M_{12}^{(2)}}{\partial y}=-D\left(\frac{\partial^3 w_{2n}}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w_{2n}}{\partial x\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=0.5a-c}=0 \tag{1.7}$$

Здесь M_{11}, M_{12}, $\widetilde{T}_{13}$, T_{13} – соответственно изгибающий и крутящий моменты, обобщенное поперечное и поперечное усилия.

Решение уравнения (1.3) при (1.5) суть

$$w_{1n}(x)=q_n(1+a_{1n}\mathrm{ch}\mu_n x+a_{2n}x\mathrm{ch}\mu_n x+a_{3n}\mathrm{sh}\mu_n x+a_{4n}x\mathrm{sh}\mu_n x)/\mu_n^4 D$$

$$w_{2n}(x)=q_n(1+b_{1n}\mathrm{ch}\mu_n x+b_{2n}x\mathrm{ch}\mu_n x+b_{3n}\mathrm{sh}\mu_n x+b_{4n}x\mathrm{sh}\mu_n x)/\mu_n^4 D \tag{1.8}$$

Постоянные a_i, b_i $(i=1,2,3,4)$ должны быть определены из восьми условий (1.4), (1.6), (1.7), что дает

$$a_{1n}=-1,\ a_{2n}=\mathrm{th}\mu_n c,\ a_{3n}=cb_{4n}/\mathrm{ch}^2\mu_n c-\mathrm{th}\mu_n c,\ a_{4n}=b_{4n}$$

$$b_{1n}=-1,\ b_{2n}=\mu_n A_n/B_n-b_{4n}L_n/B_n$$

$$b_{3n}=-1/1-\nu(\nu\mathrm{sh}\mu_n(0.5a-c)-A_nF_n/B_n+b_4L_nF_n/\mu_nB_n-b_4D_n/\mu_n)$$

$$b_{4n}=[A_n(1-\nu+F_n)\mathrm{ch}\mu_n c+\mu_n B_n(1-\nu)\mathrm{sh}\mu_n c-\nu B_n\mathrm{sh}\mu_n(0.5a-c)\mathrm{ch}\mu_n c]/$$
$$/[(1-\nu)B_nE_n-B_nD_n+L_nF_n+(1-\nu)L_n]$$

$$A_n=(1-\nu+\nu\mathrm{ch}\mu_n(0.5a-c)),\ E_n=(sh\mu_n c\mathrm{ch}\mu_n c+\mu_n c)/\mathrm{ch}^2\mu_n c$$

$$B_n=(3+\nu)\mathrm{sh}\mu_n(0.5a-c)\mathrm{ch}\mu_n(0.5a-c)+(1-\nu)\mu_n(0.5a-c)$$

$$D_n=(3+\nu)\mathrm{sh}\mu_n(0.5a-c)\mathrm{ch}\mu_n(0.5a-c)-(1-\nu)\mu_n(0.5a-c)$$

$$L_n=2\mathrm{ch}^2\mu_n(0.5a-c)+(1+\nu)\mathrm{sh}^2\mu_n(0.5a-c)$$

$$F_n=2\mathrm{sh}^2\mu_n(0.5a-c)+(1+\nu)\mathrm{ch}^2\mu_n(0.5a-c)$$

2. Имея значение $w(x,y)$, можно рассматривать следующую оптимизационную задачу: для $q(x,y)=q_0\sin\lambda_1 x$ $(\lambda_1=\pi/b)$ найти

$$\min_c\max_i\max_{x,y} w_{i1}(x,y,c)\quad \text{при}\quad x\in[-c;0.5a-c],\ y\in[0;b],\ 0\le c\le 0.5a \quad (2.1)$$

Очевидно, что для всех $x\in[-c;0.5a-c]$ прогиб пластинки $w_1(x,y)$ принимает наибольшее значение при $y=b/2$

$$\max_y w_{i1}(x,y)=w_{i1}(x,0.5b)$$

И задача (2.1) переходит к задаче: найти

$$w_*=\min_c\max_i\max_x w_{i1}(x,c)\quad \text{при}\ i=1,2,\ x\in[-c;0.5a-c],\ 0\le c\le 0.5a \quad (2.2)$$

Введем безразмерное значение для прогиба пластинки при $y=b/2$

$$\overline{w}_{i1}(\bar{x},\alpha)=w_{i1}(x,c)\mu_n^4D/q_1$$

где $\bar{x}=x/a,\ \alpha=c/a$.

Отметим, что при $\alpha=0\ (c=0)$ получаются две пластинки длиной $0.5a$, два края которых $y=0;b$ свободно оперты, край $x=0$ жестко заделан, а край $x=0.5a,(x=-0.5a)$ свободен. В случае же $\alpha=0.5a$ получается пластинка длиной a, все четыре края которой $(x=0;-a,\ y=0;b)$ свободно оперты.

Результаты решения оптимизационной задачи (2.2) для различных отношений сторон $(\lambda=a/b)$ пластинки приведены в табл. 1, где $w_{ш}$ – прогиб в центре свободно опертой по четырем краям пластинки $(\alpha=0.5)$.

Интересно отметить, что для всех λ наилучшим значением параметра расположения опор по длине пластинки

$$\alpha_*=0.282\ \ (c_*=0.282a) \quad (2.3)$$

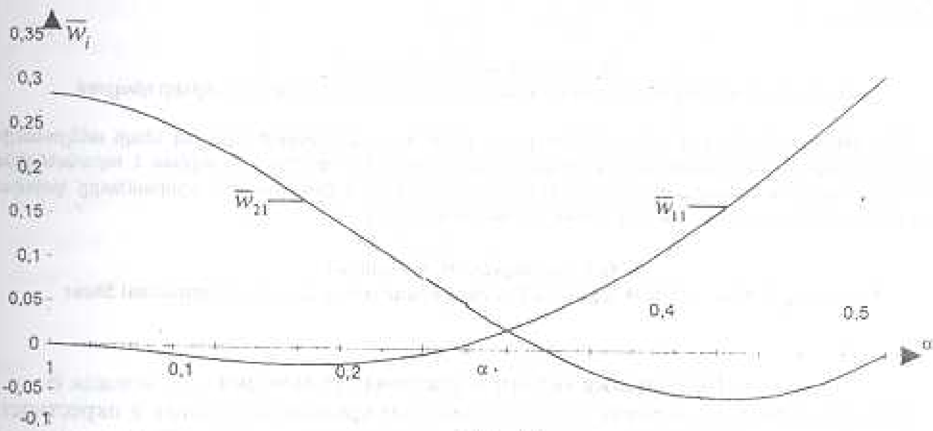
Таким образом, величина $\alpha=0.282$ является характеристикой для изотропных прямоугольных пластинок, загруженных поперечной нагрузкой $q=q_1\sin\pi y/b$, свободно опертых по краям $y=0;b$.

Табл.1

$\lambda = a/b$	3	2	1	2/3	1/2	1/3
$w/w_ш$	0,537	0,263	0,0712	0,0431	0,0313	0,0253
$w_ш/w$	1,86	3,80	14,0	23,2	31,9	39,5

Отметим также, что с уменьшением длины пластинки a (относительное увеличение ширины b) эффект от оптимизации сильно увеличивается и результат стремится к результату, полученному в [1] для пластинки-полосы, причем при $\lambda < 1/3$ результат почти не меняется.

На фиг.2 приведены графики зависимостей безразмерных прогибов $\overline{w}_{ij} = \pi^4 D w_{ij} / b^4 q_1$, при $\lambda = a/b = 1$ для различных $\alpha = c/a$, причем $\overline{w}_{11}$ определен в центре $(\overline{x} = -\alpha)$, а $\overline{w}_{12}$ — на правом конце $(\overline{x} = 0.5 - \alpha)$ пластинки по ее длине.



Фиг.2

Здесь, на оси $O\alpha$ точка $\alpha_* = 0.282\ (c = 0.282a)$ соответствует оптимальному расположению опор, обеспечивающему наименьшее значение наибольшего по координатам x, y прогиб пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки. // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ер. Изд. ЕГУ, 1997, с. 114-117.
2. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963, 635 с.

Институт механики НАН РА
Гюмрийский образовательный комплекс
Государственного инженерного
университета Армении

Поступила в редакцию
6.04.2001