ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №3, 2001 Механика

УДК 539. 3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВЫХ ТОЧЕК

Агаларян О.Б.

Հ.Բ. Աղալարյան

Երկայնական սահքի խնդրի ասիմպտոտիկական բնույթը ոչ գծային առաձգական մարմինների համար անկյունային կետերի շրջակայքում

Աշխատանքում, հոդոգրաֆի մեթոդի կիրառմամբ, ուսումնասիրված է ոչ գծային աստիճանային օրենքով ամրապնդվող մարմինների համար եզրային խնդիրների լուծումների ասիմպտոտիկական բնույթը անկյունային կետերի շրջակայքում տարբեր եզրային պայմանների առկայությամբ: Լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի համար ստացված անալիտիկ արտահայտությունների հիման վրա, արտածված են շոշափող լարումների ինտենսիվության կորերի հավասարումները, որոնք որոշ մասնավոր դեպքերում համընկնում են նախապես հայտնի արդյունքների հետ: Միաժամանակ քննարկվում են ընդհանուր ճշգրիտ առաձգակա-պլաստիկական դրվածքով, երկայնական սահքի վերաբերյալ խնդիրների լուծման կառուցման, համապատասխան եզրային խնդիրների դասի ընդլայնման և զարգացման, ինչպես նաև, ստացված արդյունքների կիրառման հնարավորությունների հարցերը:

O.B. Agalaryan

Asymptotic Behavior of Longitudinal Shear of Nonlinear Elastic Body Problem Solution in the Vicinity of Angular Points

В статье при помощи метода годографа исследуется асимптотическое поведение решения задачи продольного сдвига нелинейного упругого по степенному закону упрочняющегося материала в окрестности угловых точек при различных граничных условиях. На основе полученных асимптотических выражений, определяющих напряженно-деформированное состояние, выведены уравнения постоянных интенсивностей касательных напряжений, которые при некоторых частных случаях совпадают с соответствующими известными уравнениями. Одновременно обсуждаются вопросы, касающиеся возможных применений полученных результатов, построений точных решений задач продольного сдвига и кручения общей упруго-пластической постановки, а также развития и расширения этого класса задач.

В настоящее время вопросы напряженно-деформированного состояния в окрестности угловых точек на вершинах трещин, вырезов в плоской задаче линейной теории упругости достаточно хорошо изучены [1,2]. Построение точных решений подобных задач для упруго-пластических тел в общей постановке сопровождается известными математическими трудностями, которые являются не только в том, что необходимо найти решение сложной нелинейной системы уравнений в частных производных, но и в том, что заранее неизвестен вид поверхностей (линий), разделяющих линейно-упругие области от нелинейно-пластических зон. По существу, нелинейная краевая задача является задачей в области с частично неизвестной границей с известными граничными условиями, для решения которой не существуют общие аналитические методы.

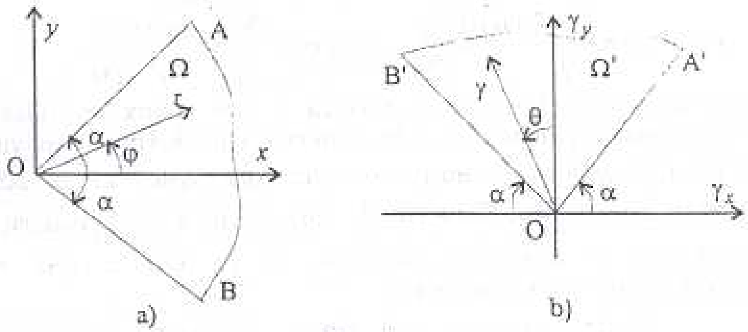
Однако, при помощи метода годографа и теории функции комплексного переменного было решено несколько задач для упруго-пластических материалов для кинематически более простого антиплоского случая [3-5]. Решения перечисленных задач с угловыми вырезами для бесконечных тел были получены для определенного вида внешних нагрузок и геометрии. Вопросы, связанные с расширением этого класса задач при помощи изменения как вида нагружения, так и условий на гранях углового выреза, можно разрешить лишь после предварительного изучения поведения поля напряжений в окрестности угловых точек нелинейного упругого тела при различных граничных условиях на внешних гранях. В данной работе осуществляется такое исследование и на его основе получены асимптотические выражения для полей напряжений и перемещений, обобщающие известные формулы линейной теории упругости. Выявлено, что метод годографа неприменим для решения перечисленных задач в связи с неоднозначностью отображения физической плоскости на плоскость деформаций или напряжений. Однако, количество этих задач можно расширить, если предположить, что бесконечное тело вместо углового выреза имеет угловой выступ с произвольным углом раствора при условии нагружения на бесконечности однородными нагрузками. В конце работы указывается способ применения полученных результатов к решению более сложных задач продольного сдвига и задач кручения призматических тел с концентраторами напряжений в виде угловых вырезов или выступов в упруго-пластической постановке.

1.**Постановка задачи.** Пусть призматическое вдоль оси бесконечное, нелинейное упругое тело, которое содержит угловую точку с произвольным угловым раствором 2α, находится в состоянии антиплоской деформации под действием заданных касательных нагрузок, приложенных на некотором расстоянии от вершины углов. В окрестности угловой точки принимаются три типа граничных уловий: первый, когда обе стороны угла свободны от внешних нагрузок; второй, когда обе стороны жестко защемлены и третий случай, когда одна сторона жестко защемлена, а вторая свободна от нагрузок. Требуется определить поля напряжений и деформаций в окрестности вершины угла для каждой поставленной задачи. В декартовой координатной системе Oxy, начало которой находится в угловой точке, а ось Oz направлена перпендикулярно указанной плоскости (фиг.1,а) по определению продольного сдвига, единственным неравным нулю компонентом перемещения будет $w(x, y)$ $(u = v \equiv 0)$, следовательно, все компоненты деформации тождественно равны нулю кроме продольных сдвигов γ_{xz}, γ_{yz}. Следуя деформационной теории пластичности, из общих уравнений равновесия и совместности остаются одно уравнение равновесия и одно уравнение совместности:

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

Зависимость между напряжением и деформацией в общем случае принимается в виде

$$\tau_{xz}=\frac{T(\Gamma)}{\Gamma}\gamma_{xz},\quad \tau_{yz}=\frac{T(\Gamma)}{\Gamma}\gamma_{yz} \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Функция $T=T(\gamma)$ определяет закон упрочнения, остальные компоненты напряжения равны нулю в связи с отсутствием соответствующих компонентов деформации. Здесь T является интенсивностью касательных напряжений, а Γ – интенсивностью деформации сдвигов.

Уравнения (1.1)-(1.2) составляют нелинейную краевую задачу в области Ω, которая должна быть решена с учетом соответствующих граничных условий. Нелинейные уравнения задач можно привести к линейным уравнениям, если компоненты деформаций (напряжений) являются однозначными функциями в рассматриваемой области, т.е.

$$\begin{cases} x=x(\gamma_{xz},\gamma_{yz}) \\ y=y(\gamma_{xz},\gamma_{yz}) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x(\tau_{xz},\tau_{yz}) \\ y=y(\tau_{xz},\tau_{yz}) \end{cases} \tag{1.3}$$

При асимптотическом исследовании, не нарушая общности задач, можно предположить, что в окрестности угла существует область, где это имеет место. Тогда с учетом (1.2), (1.3) и однородности уравнения (1.1) для новой неизвестной функции, введенной следующим образом:

$$x=\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{xz}},\quad y=\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{yz}} \tag{1.4}$$

получим следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma_{xz}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma_{yz}^2}+\frac{1}{\Gamma^2}\left[\frac{T'(\Gamma)\Gamma}{T(\Gamma)}-1\right]\left[\gamma_{xz}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma_{yz}^2}-2\gamma_{xz}\gamma_{yz}\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma_{xz}\partial\gamma_{yz}}+\gamma_{yz}^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma_{xz}^2}\right]=0 \tag{1.5}$$

Последнее уравнение в полярной координатной системе (γ,θ) с учетом того, что $\Gamma \equiv \gamma$ и угол θ отсчитывается от оси $O\gamma_{yz}$, принимает более простой вид [3]:

$$\frac{T(\gamma)}{\gamma T'(\gamma)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \tag{1.6}$$

А соотношения (1.4) запишутся в следующей форме:

$$x=-\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}-\frac{\cos\theta}{\gamma}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ y=\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}-\frac{\sin\theta}{\gamma}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{1.7}$$

Теперь выясним, для какой области и при каких краевых условиях необходимо решить уравнение (1.6). Сначала рассмотрим первую краевую задачу. Для этой цели отдельно рассмотрим два случая, когда $2\alpha\in(0;\pi]$ и когда $2\alpha\in(\pi;2\pi]$. Пусть $2\alpha\in(0;\pi]$, тогда, т.к. в окрестности вершины грани свободны от внешних нагрузок, то на OA и OB граничные условия принимают следующий вид:

$$\sin\alpha\tau_{xz}-\cos\alpha\tau_{yz}=0,\ \sin\alpha\tau_{xz}+\cos\alpha\tau_{yz}=0 \tag{1.8}$$

Эти два условия составляют алгебраическую однородную систему из двух уравнений относительно τ_{xz} и τ_{yz}, и поскольку главный определитель $\Delta=2\sin\alpha\cos\alpha\neq0\ (0<\alpha<\pi/2)$, то получим, что окрестность точки вершины угла (область Ω) отображается в плоскости $(\gamma_{xz},\gamma_{yz})$ на клиновидную область Ω' (фиг.1,б). Для определения граничных условий в плоскости деформаций, заметим, что на OA плоскости Oxy имеем $y=\mathrm{tg}\alpha x$, а на OB – $y=-\mathrm{tg}\alpha x$. Подставляя выражения x, y из (1.4) в эти уравнения, получим, что неизвестная функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{yz}}-\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{xz}}\mathrm{tg}\alpha=0,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{yz}}+\frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{xz}}\mathrm{tg}\alpha=0 \text{ на } OA' \text{ и } OB' \tag{1.9}$$

Таким образом, при применении метода годографа, граничные условия исходной задачи определяют геометрию области Ω' в плоскости $(\gamma_{xz},\gamma_{yz})$, а геометрия исходной области Ω определяет граничные условия на Ω': условия (1.9) в полярной координатной системе принимают следующий вид:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi/2-\alpha}=0,\ \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right|_{\theta=-\pi/2+\alpha}=0 \tag{1.10}$$

Окончательно решение поставленной задачи свелось к нахождению собственных и соответствующих собственных функций нелинейной однородной краевой задачи (1.6)-(1.10). С целью построения ее решения примем, что имеет место степенной закон упрочнения, т.е.

$$T(\gamma) = B\gamma^{\beta} \tag{1.11}$$

где $0 < \beta \le 1$ при $\beta = 1$ и $B = G$; из (1.11) следует закон Гука. Тогда уравнение (1.6) является линейным уравнением, решение которого при помощи метода разделения переменных и с учетом граничных условий записывается в виде:

$$\psi(\gamma,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{m_k} \left[A_k \cos\lambda_k\theta + B_k \sin\lambda_k\theta \right] \tag{1.12}$$

где $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{\pi - 2\alpha}$, $m_k = 1 - \beta + \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\beta\lambda_k^2)}$ (1.13)

A_k, B_k — неизвестные величины, подлежащие определению из условий сопряжения на дуге раздела окрестности вершины угла. Для получения асимптотических выражений из граничных условий следует, что достаточно взять первое слагаемое ряда (1.12) в виде

$$\psi(\gamma,\theta) = -K\gamma^{m_1} \sin\lambda_1\theta \tag{1.14}$$

где K — постоянная величина.

С учетом формулы (1.4) для компонента перемещения получим следующие выражения:

$$w = x\gamma_{xz} + y\gamma_{yz} - \psi \tag{1.15}$$

Тогда с учетом (1.7) получим

$$\begin{aligned} x &= K\left(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)^{m_1/2-1}\left[m_1\gamma_{xz}\sin\left(\lambda_1 \mathrm{arctg}\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}\right) + \lambda_1\gamma_{yz}\cos\left(\lambda_1 \mathrm{arctg}\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}\right)\right] \\ y &= K\left(\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)^{m_1/2-1}\left[m_1\gamma_{yz}\sin\left(\lambda_1 \mathrm{arctg}\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}\right) - \lambda_1\gamma_{xz}\cos\left(\lambda_1 \mathrm{arctg}\frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.16}$$

Решая систему уравнений (1.16) относительно γ_{xz}, γ_{yz} и используя соотношения (1.2) и (1.15) для компонента перемещения и компонентов напряжения в полярной координатной системе, получим следующие асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} w &= K^{-\frac{1}{m_1-1}}(1-m_1)\left(\frac{r}{\lambda_1 m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_1-1}}\left[m_1^2\cos^2(\varphi - æ_1) + \lambda_1^2\sin^2(\varphi - æ_1)\right]^{\frac{m_1}{2(m_1-1)}}\sin\lambda_1 æ_1 \\ \tau_{\varphi z} &= B\left(\frac{r}{K\lambda_1 m_1}\right)^{\frac{\beta}{m_1-1}}\left[m_1^2\cos^2(\varphi - æ_1) + \lambda_1^2\sin^2(\varphi - æ_1)\right]^{\frac{\beta}{2(m_1-1)}}\cos(\varphi - æ_1) \\ \tau_{rz} &= B\left(\frac{r}{K\lambda_1 m_1}\right)^{\frac{\beta}{m_1-1}}\left[m_1^2\cos^2(\varphi - æ_1) + \lambda_1^2\sin^2(\varphi - æ_1)\right]^{\frac{\beta}{2(m_1-1)}}\sin(\varphi - æ_1) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь угол $æ_1(\varphi)$ определяется из следующего уравнения:

$$m_1 \sin\lambda_1 æ_1 \cos(\varphi - æ_1) - \lambda_1 \cos\lambda_1 æ_1 \sin(\varphi - æ_1) = 0 \qquad (1.18)$$

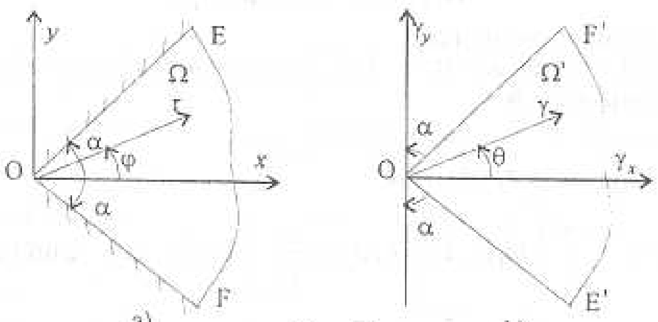
(при $-\alpha < \varphi < \alpha \quad -\pi/2 + \alpha < æ_1 < \pi/2 - \alpha$).

Нетрудно убедиться, что при $\beta = 1$ из (1.17) получаются известные асимптотические выражения [2], кроме того, из (1.17) следует также, что компоненты напряжения стремятся к нулю, как r^{n_1}, где

$$n_1 = \frac{\pi - 2\alpha}{8\alpha(\pi - \alpha)}\left[\sqrt{(1-\beta)^2(\pi - 2\alpha)^2 + 4\beta\pi^2} + (1+\beta)(\pi - 2\alpha)\right] \qquad (1.19)$$

причем $n_1 > 0$ для $\forall\beta \in (0,1]$; и $\alpha \in (0, \pi/2]$.

Эта формула совпадает с аналогичной формулой, полученной в [6], однако, в ней, по существу, построение решения краевой задачи отсутствует, исследуется лишь поведение полей напряжений и перемещений в окрестности угловой точки, следствием чего из результатов этой работы не получаются вышевыведенные асимптотические выражения.



Фиг. 2

Рассмотрим следующий случай, когда $2\alpha \in (\pi, 2\pi]$. Исходя из граничных условий, нетрудно убедиться, что область Ω отображается в плоскости $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ на бесконечную область Ω'. В основе построения этого отображения лежит предположение, что компоненты напряжения, как и для линейной задачи, увеличиваются в окрестности угловой точки. После построения решения, исходя из условий непрерывности, доказывается справедливость этого предположения. При помощи замены переменных $\gamma_1 = 1/\gamma$, $\theta_1 = \theta$; плоскость $(\gamma\theta)$ заменяется плоскостью (γ_1, θ_1), а область Ω' переходит в область Ω. При таком координатном преобразовании уравнение остается линейным и снова неизвестная функция ищется при помощи метода разделения переменных. Поступая таким же образом, как это было сделано в первом случае, получим, что асимптотические выражения компонентов напряжения полностью совпадают с формулами (1.17), только в этом случае при $r \to 0$ напряжения стремятся к бесконечности, как r^{n_1}, причем n_1 – для любого

$\beta \in (0,1]$ и $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, а это означает, что наше предположение о том, что напряжения бесконечно увеличиваются для любого β, является справедливым. Построены графики от показателя упрочнения β и угла раствора α (фиг.2а и б). Из графиков видно, что при удалении от линейной теории упругости порядок убывания или возрастания компонентов напряжения уменьшается.

Отметим, что для оценки локальной прочности в окрестности угловой точки нелинейного тела важное значение имеет определение линий постоянной интенсивности касательных напряжений, которые показывают места возникновения и внешние виды пластических зон, а при полном решении задачи—также направления их развития. Опуская подробные выкладки, на основе формул (1.14) и (1.16) можно показать, что уравнения этих линий в декартовой системе Oxy в случае $\alpha \in (\pi/2, \pi]$ имеют вид:

$$2x\gamma^{n+1} + K\left[(n-\lambda)\cos(1-\lambda)\theta^* - (n+\lambda)\cos(1+\lambda)\theta^*\right] = 0 \tag{1.20}$$

где введены следующие обозначения:

$$\lambda = -\pi/(\pi - 2\alpha),\ n = \left[-1 + \beta + \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\beta\lambda^2}\right]/2$$
$$\theta^* = \frac{1}{2\lambda}\arccos\left[\frac{K^2(n^2+\lambda^2) - 2\gamma^{2(n+1)}(x^2+y^2)}{K^2(n^2-\lambda^2)}\right] \tag{1.21}$$

γ и K — постоянные величины.

В частном случае, когда $\alpha = \pi$, $\lambda = 1$, из (1.20) получим, что эти линии являются окружностями с уравнениями:

$$y^2 + [x - X(\gamma)]^2 = R^2(\gamma) \tag{1.22}$$

где
$$X(\gamma) = \frac{1-\beta}{2}K\gamma^{-1+\beta},\ R(\gamma) = \frac{1+\beta}{2}K\gamma^{-1-\beta} \tag{1.23}$$

$X(\gamma)$ — расстояние от вершины угловой точки, а $R(\gamma)$ — радиус окружности соответственно, т.е. асимптотическое поведение поля напряжений с точностью до постоянного множителя такое же, как в задачах, изучаемых в работах [3,7,8].

2. Рассмотрим вторую краевую задачу, когда: 1) $2\alpha \in (0,\pi]$ и 2) $2\alpha \in (\pi, 2\pi]$. Пусть имеет место первый случай, тогда на координатной плоскости Oxy (фиг.3,а) имеем следующие граничные условия:

$$w(x,y) = 0 \text{ на } OE \text{ и } OF \tag{2.1}$$

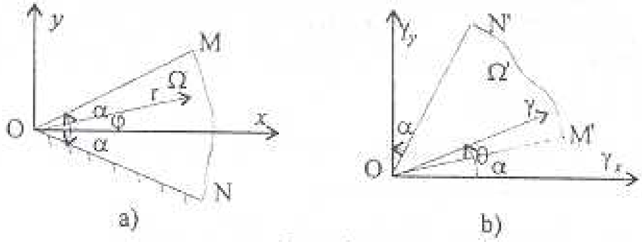
Исходя из этих условий, построим отображение области Ω на плоскость деформаций $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$. С этой целью продифференцируем условия (2.1), получим

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = 0 \text{ или } \gamma_{xz}dx + \gamma_{yz}dy = 0 \tag{2.2}$$

Так как на $OE\ dx/dy=\mathrm{ctg}\alpha$, а на $OF\ dx/dy=-\mathrm{ctg}\alpha$, следовательно, OE отображается на прямую $\gamma_{yz}=\mathrm{ctg}\alpha\gamma_{xz}$, а OF – на $\gamma_{yz}=-\mathrm{ctg}\alpha\gamma_{xz}$, а это означает, что область Ω отображается на область Ω' (фиг.3,б). Граничными условиями на функции ψ в этом случае являются:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right|_{\theta=-\pi/2+\alpha}=0,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right|_{\theta=\pi/2-\alpha}=0 \tag{2.3}$$

Здесь угол θ отсчитывается от оси $O\gamma_{xz}:\gamma_{xz}=\gamma\cos\theta,\ \gamma_{yz}=\gamma\sin\theta$.



Фиг. 3

Подобным путем, как это было сделано в пункте один, применяя метод разделения переменных к решению краевой задачи (1.16), (2.3) и выбирая функцию ψ в виде

$$\psi=K\gamma^{m_1}\cos\lambda_1\theta \tag{2.4}$$

где
$$\lambda_1=\frac{\pi}{\pi-2\alpha},\quad m_1=\frac{1}{2}\left[1-\beta+\sqrt{(1-\beta)^2+4\beta\lambda_1^2}\right] \tag{2.5}$$

Для компонента перемещения и компонетов напряжений аналогичным путем получим асиптотические выражения, не слишком отличающиеся от вышеприведенных выражений. В этом случае уравнения линий постоянной интенсивности касательных напряжений, когда угол раствора равен 2π, также являются окружностями с центрами, расположенными на оси Ox, которые при одинаковых значениях коэффициентов концентрации напряжений совпадают с соответствующими окружностями в первой краевой задаче.

3. Рассмотрим случай смешанных граничных условий. В этом случае из решения линейной теории упругости следует, что значение предельного угла равно $\pi/2$ и поэтому снова рассмотрим два случая: 1) когда $2\alpha\in(0,\pi/2]$ и 2) когда $2\alpha\in(\pi/2,2\pi]$. Тогда граничные условия будут (фиг.4,а)

$$\tau_{nz}(x,y)=0 \text{ на } OM;\ w(x,y)=0 \text{ на } ON \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что область Ω отображается в плоскости $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ на область Ω' (фиг.4,б), причем в Ω необходимо решить уравнение (1.11) с следующими граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right|_{\theta=\alpha} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right|_{\theta=\pi/2-\alpha} = 0 \tag{3.2}$$

Аналогичным образом, применяя метод разделения переменных к решению краевой задачи (1.16), (3.2) и выбирая функцию ψ в виде

$$\psi = K\gamma^{m_1}\cos\lambda_1(\theta-\alpha) \tag{3.3}$$

где $\lambda_1 = \dfrac{\pi}{\pi-4\alpha}$, $m_1 = \dfrac{1}{2}\left[1-\beta+\sqrt{(1-\beta)^2+4\beta\lambda_1^2}\right]$

Для компонента перемещения и компонентов напряжения получим следующие асимптотические выражения:

$$w = K^{-\frac{1}{m_1-1}}(m_1-1)\left(\frac{r}{\lambda_1 m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_1-1}}\left[m_1^2\sin^2(\varphi-æ_3)+\lambda_1^2\cos^2(\varphi-æ_3)\right]^{\frac{m_1}{2(m_1-1)}}\cos\lambda_1(æ_1-\alpha)$$

$$\begin{gathered}\tau_{\psi z} = -B\left(\frac{r}{K\lambda_1 m_1}\right)^{\frac{\beta}{m_1-1}}\left[m_1^2\sin^2(\varphi-æ_3)+\lambda_1^2\cos^2(\varphi-æ_3)\right]^{\frac{\beta}{2(m_1-1)}}\sin(\varphi-æ_3)\\ \tau_{\varphi z} = -B\left(\frac{r}{K\lambda_1 m_1}\right)^{\frac{\beta}{m_1-1}}\left[m_1^2\sin^2(\varphi-æ_3)+\lambda_1^2\cos^2(\varphi-æ_3)\right]^{\frac{\beta}{2(m_1-1)}}\cos(\varphi-æ_3)\end{gathered} \tag{3.4}$$

где $m_1\sin(\varphi-æ_3)\cos\lambda_1(æ_3-\alpha)+\lambda_1\cos(\varphi-æ_3)\sin\lambda_1(æ_3-\alpha)=0$;

при $-\pi/4<\alpha<\pi/4$, $\alpha<æ_3<\pi/2-\alpha$.

Эти выражения справедливы и для $2\alpha\in(\pi/2,2\pi]$, при этом, $n_3 = n_1(2\alpha)>0$, если $2\alpha\in(0,\pi/2]$ и $n_3<0$, если $2\alpha\in(\pi/2,2\pi]$.

Отметим, что предельный переход к линейной теории упругости также имеет место. Определяя уравнение линейной постоянной интенсивности касательных напряжений с точностью до постоянного множителя, для этого случая будем иметь:

$$\begin{gathered}2x\gamma^{n+1}+K\left\{(n+\lambda)\sin\left[(1+\lambda)\theta^*+\lambda(\alpha-\pi/2)\right]-\right.\\ \left.-(n-\lambda)\sin\left[(1-\lambda)\theta^*-\lambda(\alpha-\pi/2)\right]\right\}=0\end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$\lambda = -\frac{\pi}{\pi-4\alpha},\ n = \frac{1}{2}\left[-1+\beta+\sqrt{(1-\beta)^2+4\beta\lambda^2}\right]$$

$$\theta^* = \frac{1}{2\lambda}\arccos\left[\frac{K^2(n^2+\lambda^2)-2\gamma^{2(n+1)}(x^2+y^2)}{K(n^2-\lambda^2)}\right]-\alpha+\frac{\pi}{2} \tag{3.6}$$

Когда угол раствора равен 2π, то из (3.5) и (3.6) получим

$$\begin{gathered}108K\gamma^{4(n+1)}(x^2+y^2)^2-9K\gamma^{2(n+1)}(x^2+y^2)- \\ -(3n+1)(3n-1)^2\gamma^{n+1}x+Kn(3n+1)^2=0\end{gathered} \tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7) следует, что когда пластическое состояние охватывает малую зону, то вид этих областей существенно отличается от видов пластических областей вышерассмотренных случаев.

С целью применения полученных результатов для решения более сложных упруго-пластических задач продольного сдвига или кручения (в асимптотическом смысле эти задачи эквивалентны [8]) отметим, что имея вид линий постоянной интенсивности касательных напряжений с точностью до постоянного множителя, тем самым, имеем области, где материал остается упругим, это делает целесообразным использование известных численных методов, в частности, метода граничных интегральных уравнений, для определения напряженно-деформированного состояния в таких областях. Неизвестный множитель K определяется из условий непрерывности решений на линии раздела. В случае, когда значение угла раствора равно π, K можно определить также на основе криволинейных интегралов типа J – интеграла энергии. Ясно, что при таком способе решения количество угловых точек или трещин может быть произвольным, однако указанный способ решения упруго-пластических задач справедлив, когда области пластической деформации малы по сравнению с упругой областью, т.е. когда она локализована в окрестности угловой точки. При крупно-масштабном течении (полное решение) необходимо учитывать последующие слагаемые в выражениях вводимой функции. Этот способ решения, по сравнению с ранее предлагаемым общим методом решения [9], имеет то преимущество, что при численной реализации его вместо координатных функций выбираются значения постоянных величин.

Отметим также, что на основе полученных формул приходим к выводу, что метод годографа в общем случае неприменим для решения задач с угловым вырезом при различных граничных условиях в связи с неоднозначностью отображения на плоскость деформаций. Однако, для углового выступа в виде треугольника он все же применим и тогда, образами поперечного сечения бесконечного тела будут круговые секторы с разными углами растворов, содержащие радиальные разрезы конечными длинами, выходящими на круговую границу. Для полного решения этой задачи необходимо найти функции, конформно-отображающие эти области на канонические области. Задача с угловым выступом, по сравнению с задачей с угловым вырезом, интересна тем, что возникают две пластические зоны, поэтому можно определить их взаимоотношения и, в частности, направления их развития в зависимости от величин внешних нагрузок и типов внешних условий. Эти вопросы, а также вопросы, связанные с оценками критического состояния упруго-пластического тела при различных критериях прочности, находятся в процессе исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
2. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
3. Райс Дж. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упруго-пластическом материале при продольном сдвиге // ПМ. 1967. №2.
4. Клюшников В.Д., Ибрагимов А. О влиянии деформационной анизотропии на состояние в окрестности конца трещины // МТТ. 1977. №5.
5. Edmunds T.M. and Willis J.R. Analysis of a crack sited at a notch in an elastic-perfectly plastic strip subjected to longihidinal shear // Int. J. of Tractore. 1976. Vol.12. №3.
6. Задоян М.А. Продольный сдвиг составного клина // ДАН СССР. 1987. №2.
7. Нейбер Г. Теория концентрации касательных напряжений в призматических телах при произвольной нелинейной зависимости между напряжениями и деформацией // ПМ. 1961. №4.
8. Агаларян О.Б. К задаче кручения осесимметричного упруго-пластического тела с трещиной // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1978. Т.31. №6. С. 36-41.
9. Агаларян О.Б. Метод решения задач о локализованном пластическом течении. Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд. Ленинградского университета. 1982. Вып.14.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.07.1999