ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա | 54, №3, 2001 | Механика

УДК 531.1

К ВОПРОСУ ОБНАРУЖЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ

Шекян Г.Г.

Հ.Գ. Շեկյան
Համակարգերի վիճակի պարամետրերի բացահայտումը ստատիստիկ եղանակով

Դիտարկված է ժամանակակից մաթեմատիկական ապարատի օգտագործման հնարավորությունը վիճակի ազդանշանների չափումների արդյունքների մշակման և վիճակագրական ու տեղեկատվական տեսությունների հիման վրա նրանց գնահատման համար: Ցույց է տրված, որ եթե դիտումների արդյունքները դիսկրետ պատահական մեծություններ են, ապա նրանց բաշխման խտության հավանականությունը անհրաժեշտ է փոխարինել պայմանական հավանականությամբ: Այդ դեպքում գնահատման հիպոթեզի ընտրման ռանդոմիզացված եղանակը դառնում է ամենաօպտիմալը, իսկ ընտրման պայմանական հավանականությունը վեր է ածվում դիտումների հայտանիշներից կախված ֆունկցիոնալի: Ստացված են հիպոտեզի հավանական ընտրության, վիճակի գնահատման, միջինացված սխալների գնահատման հավանականության և վերականգնման արժեքների որոշման հավասարումները:

H.G. Shekyan
To the Question of Discovering Parameters of Systems State by the Method of Statistical Check

Рассмотрена возможность применения современного математического аппарата для обработки результатов измерений сигналов обнаружения состояния и на основе теорий статистики и информатики получены явные рекуррентные выражения оценивания. Показано, что если результаты наблюдений дискретно-случайные величины, то плотность вероятности распределения необходимо заменить условной вероятностью. В этом случае гипотеза выбора рандомизированного метода оценивания становится оптимальной, а условная вероятность выбора превращается в функционал от наблюдаемого признака. Получены интегральные уравнения определения вероятности выбора гипотез, вероятности оценивания усредненных ошибок и стоимости восстановления нормального состояния.

Методы проверки гипотез и оценки параметров механических систем, разработанные математической статистикой, составляют основу для последовательного теоретического подхода к разнообразным прикладным задачам.

Как и во многих других работах прикладного характера, здесь рассматриваются вопросы использования современного математического аппарата для обработки результатов измерений слабых электрических или оптических сигналов обнаружения состояния и получения явных формул оценивания на основе теории статистики и теории информатики.

Предлагаемая методика может описать также источники неопределенности или ошибок, которые искажают наблюдения.

Пусть при наблюдении за системой получены результаты в виде данных $v_1, v_2, \ldots, v_n$, на основе которых необходимо принять решение о состоянии системы. Например, такой системой может быть электрический генератор, на котором n раз за время наблюдения измерялся уровень виброскорости v(t), и необходимо решить, какой из возможных сигналов измерения уровня вибраций определяет исправное состояние. Система может находиться в любом из M состояний, и утверждение "система находится в состоянии j" мы назовем гипотезой

$H_j = 1,2,...M$. В примере с электрическим генератором гипотеза H_j означает, что

$$v(t) = s_j(t) + n(t),$$

где $s_j(t)$ есть j-й сигнал, который может появляться в дискретный момент времени t_j, а $n(t)$ — случайный шум. Наблюдения $(v_1, v_2, ..., v_n) = v$ являются величинами с совместной плотностью распределения вероятностей (р.в.) $P_j(v) = P_j(v_1, v_2, ..., v_n)$, если система находится в состоянии j с относительной частотой ξ_j, где

$$\sum_{j=1}^{M} \xi_j = 1 \tag{1}$$

Величины ξ_j — суть априорной вероятности гипотез.

Следствием любого решения является выполнение каких-то действий, зависящих от выбранной гипотезы. Если бы ничего не предпринималось, не было бы смысла принимать какое-либо решение. Эти действия влекут за собой и некоторые затраты, зависящие от истинного состояния системы. Пусть C_{ij} означает стоимость действия, если была выбрана гипотеза H_j. Величины C_{ij} приписывают относительные веса различным возможным ошибкам и правильным решениям. Процедура решения обычно проводится много раз при одинаковых обстоятельствах, так что требуется найти процедуру, минимизирующую среднюю стоимость.

Процедура решения, или стратегия, должна указывать, какую из гипотез следует выбрать при любом наборе v наблюдений. Можно представить себе также, что принятие решения содержит в себе случайный элемент, т.е. при наборе наблюдений v гипотеза H_i принимается с некоторой вероятностью $\Pi_i(v)$, $i = 1,2,...,M$. Эти вероятности подчиняются условиям [1]

$$0 \le \Pi_i \le 1, \sum_{i=1}^{M} \Pi_i(v) = 1 \tag{2}$$

Будем говорить, что функции $\{\Pi_i(v)\}$ определяют рандомизированную стратегию. Выбор гипотезы можно проводить с помощью рулетки, сконструированной таким образом, что ее колесо останавливается напротив чисел 1,2,.....M с выбранными вероятностями Π_i, зависящими от наблюдений $v_1, v_2, ..., v_n$. Просто случайный выбор одной из M гипотез соответствует $\Pi_i(v) = M^{-1}$ для всех i [1,2].

Если справедлива гипотеза H_j, то вероятность выбрать гипотезу H_i равна

$$P_r\{i|j\} = \int_R \Pi_i(v) P_j(v) d^n v \tag{3}$$

где $d^n v = dv_1 \cdot dv_2 ... dv_n$ — элемент объема n-мерного пространства R наблюдений v. Такое событие приводит к затратам C_{ij}, а так как гипотеза

H_i имеет априорную вероятность ξ_j, то средняя стоимость стратегии равна

$$\overline{C} = \overline{C}\left[\{\Pi_i\}\right] = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\xi_j C_{ij} P_r\{i|j\} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\xi_j C_{ij}\int_R \Pi_i(\mathrm{v}) P_j(\mathrm{v}) d^n\mathrm{v} \tag{4}$$

Вводя для каждой гипотезы H_i "функцию риска"

$$W_j(\mathrm{v}) = \sum_{j=1}^{M}\xi_j C_{ij} P_j(\mathrm{v}) \tag{5}$$

представим среднюю стоимость в виде

$$\overline{C} = \int_R \sum_{i=1}^{M} W_i(\mathrm{v})\Pi_i(\mathrm{v}) d^n\mathrm{v} \tag{6}$$

и будем искать M функций $\Pi_j(\mathrm{v})$, удовлетворяющих (2) и минимизирующих $\overline{C}$.

Величина интеграла из (6) будет минимальной, если подынтегральная функция принимает минимально возможное значение в каждой точке $\mathrm{v}\in R$. Поэтому средняя стоимость "C" будет минимальной, если в каждой точке v мы выберем гипотезу, для которой риск $W_i(\mathrm{v})$ имеет минимальное значение.

Для этого положим

$$\Pi_j(\mathrm{v}) = 1, \Pi_i(\mathrm{v}) \equiv 0 \forall i \neq j \tag{7}$$

во всех точках $\mathrm{v}\in\mathrm{R}$, для которых

$$W_j(\mathrm{v}) \langle W_i(\mathrm{v}), \forall i \neq j \tag{8}$$

Если две или более функции $W_i(\mathrm{v})$ принимают одинаковые минимальные значения, то безразлично, какая из гипотез выбирается при решении. Предложенная стратегия вообще не требует рандомизации. При этом пространство наблюдений R разбивается на области $R_1, R_2, \ldots, R_M$, определяемые условиями (8), и, если точка v попадает в область R_i, выбирается гипотеза H_i.

Если ввести функцию

$$\gamma(\mathrm{v}) = \min W_i(\mathrm{v}) \tag{9}$$

то для всех v и всех гипотез H_i соотношения (7) и (9) можно переписать в виде

$$\left[W_i(\mathrm{v}) - \gamma(\mathrm{v})\right]\Pi_i(\mathrm{v}) = 0 \tag{10}$$

$$W_i(\mathrm{v}) - \gamma(\mathrm{v}) \geq 0 \tag{11}$$

Далее суммируя (10) по i и учитывая (2), получим

$$\gamma(\mathrm{v}) = \sum_{i=1}^{M} W_i(\mathrm{v})\Pi_i(\mathrm{v}) \tag{12}$$

В силу (6) минимальная средняя стоимость теперь будет

$$\overline{C}_{\min} = \int_R \gamma(\mathrm{v}) d^n(\mathrm{v}) \tag{13}$$

Пусть функции $\{\Pi_i(v)\}$ определяют какую-нибудь стратегию, отличную от оптимальной. Конечно, они должны подчиняться условиям (2). В силу (6) разность между стоимостью $\overline{C}\,'$, соответствующей этой стратегии, и стоимостью $\overline{C}_{\min}$, определяемой формулами (10)-(13), равна

$$\overline{C}' - \overline{C}_{\min} = \sum_{i=1}^{M} \int_R [W_i(v) - \gamma(v)]\Pi_i'(v)d^n v \tag{14}$$

в силу (11) и неотрицательности вероятностей $\Pi_i'(v)$

$$\overline{C'} - \overline{C}_{\min} \geq 0 \tag{15}$$

а (10) показывает, что минимальная стоимость достигается на наборе $\{\Pi_i(v)\}$. В силу (10) $\Pi_i(v)$ должны быть равны нулю для всех гипотез H_i, для которых $W_i(v)\rangle\gamma(v)$. Для гипотез H_i с $W_i(v) = \gamma(v)$ вероятности $\Pi_i(v)$ можно выбрать произвольным образом (конечно, с соблюдением условий (2)).

Обычно существует только одна такая гипотеза, и тогда мы получаем описание, эквивалентное (7) и (8).

Функции риска $W_i(v)$ пропорциональны апостериорным рискам $r_i(v)$ гипотез после наблюдения v

$$r_i(v) = \sum_{k=1}^{M} C_{ik} P_r\{H_k|v\} = W_i(v)/P(v) \tag{16}$$

где

$$P_r\{H_k|v\} = \xi_k P_k(v)/P(v) - \tag{17}$$

апостериорная вероятность гипотезы H_k, а

$$P(v) = \sum_{j=1}^{M} \xi_j P_j(v) -$$

плотность распределения вероятности наблюдений. Наилучшая стратегия выбирает гипотезу с минимальным апостериорным риском.

В своей работе в 1763г. Томас Бейс [2] рассмотрел проблему принятия решений в условиях неопределенности и рекомендовал выбрать гипотезу с наибольшей апостериорной вероятностью. Формула (17) называется формулой Бейса, и рекомендация Бейса относится к случаю, когда все ошибки имеют одинаковую стоимость [3]:

$$C_{ij} \equiv 1 \text{ при } i \neq j; \; C_{ij} \equiv 0 \text{ при } i = j \tag{18}$$

или когда любое правильное решение поощряется одинаково:

$$C_{ij} \equiv -1 \text{ при } i = j; \; C_{ij} \equiv 0 \text{ при } i \neq j \tag{19}$$

поэтому стратегия Бейса минимизирует среднюю вероятность ошибки

$$P_e = 1 - \sum_{j=1}^{M} \xi_j P_r(i|j) = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \sum_{k\neq 1} P_r(k|j) \tag{20}$$

Мы рассматривали наблюдения как точки некоторого континуума, и использовали плотности распределения вероятностей $P_j(v)$, $j = 1,2,...M$. Если же наблюдения являются дискретными случайными величинами, то плотности распределения вероятностей $P_j(v)$ следует заменить условными вероятностями $P_r\{v|H_j\}$ наблюдения v при каждой из Н гипотез. Тогда интегрирование по пространству наблюдений R заменяется суммированием.

В теории обнаруживания параметров набор имеющихся наблюдений часто бывает бесконечным. Например, можно представить себе, что измерение уровня диагностического признака производится во все моменты времени интервала наблюдения. Тогда возникают определенные трудности в определении плотности распределения вероятности $P_j(v)$. Наиболее прямой подход состоит в том, чтобы начать рассмотрение с конечного набора v из n наблюдений и перейти к пределу при $n\to\infty$. Переход к пределу наиболее просто осуществляется в апостериорных вероятностях $P_r\{H_k|v\}$ из (17). Для этого вводят фиктивную гипотезу H_0 с плотностью распределения вероятности $P_0(v)$. Часто эта гипотеза соответствует отсутствию какого бы то ни было сигнала, и тогда $P_0(v)$ описывает распределение "шума". Апостериорные вероятности теперь можно выразить в виде

$$P_r\{H_k|v\}=\xi_k\Lambda_k(v)\Big/\sum_{j=1}^{M}\xi_j\Lambda_j(v) \tag{21}$$

где $\Lambda_k(v)=P_k(v)/P_0(v),\ k=1,2,..M$ — отношения правдоподобия. Они переходят в функционалы $\Lambda_k[v(t)]$ от наблюдаемого признака при $n\to\infty$. Таким образом, плотность распределения вероятности оценивания состояний можно получить оптимизацией функционала для бесконечного числа наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 241 с.
2. Вальд(Wald A.) Constributions to the theory of statistical estimation and testing of hypotheses. Ann. Math. Stat. 10,299-326 (1939) Reprinted in "Selected Papers in Probability and Statistics", Standard Univ. Press,Standard, California,1957.
3. Бейс Т. An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances. Phil.Trans.Roy.Soc(london), 53, 370-418 (1763) Reprinted in Biometrica 45, 293-315 (1958)

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.06.1999