ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Ջերմաառաձգական սալում ոչ գծային ալիքների մասին

Դիտարկվում է երկրաչափորեն ոչ գծային ջերմաառաձգական սալում (կապակցված խնդիր) ալիքների տարածման խնդիրը: Ցույց է տրվում կտրող ուժից ոչ գծային անդամի և ջերմության ազդեցությունները ալիքների տարածման կայունության պայմանում:

L.A. Movsisyan
On Non-Linear Waves in Thermoelastic Plate

Обычно при изучении геометрически нелинейных колебаний пластин инерционным членом от продольного перемещения по известным соображениям пренебрегают [1].

При изучении распространения волн модуляции в пластине [2] оказалось, что сохранение этого члена совершенно меняет ее картину, т.е. если без учета этого члена движение волнового пакета устойчиво ("жесткая" характеристика), то уже наличие – неустойчиво ("мягкая" характеристика).

В настоящей работе исследуется распространение одномерных нелинейных волн в термоупругой пластине (связанная задача). В отличие от [1,2] в уравнениях движения сохраняется нелинейный член от перерезывающего усилия [3,4]. Выявляется роль этого члена и температуры в вопросе устойчивости распространения волн модуляции.

1. Уравнения одномерного движения пластинки берем в виде [3]

$$\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad \frac{\partial M}{\partial x}=N \tag{1.1}$$

В [1] в первом уравнении второй член отсутствует, однако, как показано в [3], имеются задачи устойчивости, в которых роль этого члена существенна. Оказывается, и в настоящей задаче наличие этого члена приводит не только к количественным изменениям в условии устойчивости распространения волн.

В предположении линейного изменения температуры по толщине пластинки $\theta=\theta_0+z\theta_1$ и справедливости гипотезы прямых нормалей для усилия T и момента M имеем:

$$T=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha(1+\nu)\theta_0\right]$$
$$M=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha(1+\nu)\theta_1\right] \tag{1.2}$$

и два уравнения теплопроводности [5,6]

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+A\theta_0+\chi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+B\theta_1-\chi\eta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=0 \qquad (1.3)$$

$$A=\frac{2s}{\rho hc_p},\quad B=\frac{12\chi}{h^2}+\frac{6s}{\rho hc_p}$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала, $\chi=\lambda_0/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, λ_0 — коэффициент теплопроводности, s — коэффициент теплопередачи поверхности тела, $\eta=\gamma T^0/\lambda_0$ — коэффициент связанности, $\gamma=E\alpha/(1-2\nu)$, T^0 — температура недеформированного тела.

На основании (1.1) и (1.2) уравнения движения в перемещениях будут:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha(1+\nu)\theta_0\right]+\frac{h^2}{12}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\alpha(1+\nu)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\}=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha(1+\nu)\theta_1\right]-\frac{12}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha(1+\nu)\theta_0\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+ \qquad (1.4)$$

$$+\frac{12}{h^2\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Здесь $\mathrm{v}=\left[E/\rho(1-\nu^2)\right]^{1/2}$ — скорость упругой волны в пластине.

2. Решение системы (1.3)-(1.4) будем искать в виде:

$$\theta_0=T_0+T_2e^{2i\tau}+\bar{T}_2e^{-2i\tau},\quad \theta_1=T_1e^{i\tau}+\bar{T}_1e^{-i\tau}$$

$$u=u_0+u_2e^{2i\tau}+\bar{u}_2e^{-2i\tau},\quad w=w_1e^{i\tau}+\bar{w}_1e^{-i\tau},\quad \tau=kx-\omega t \qquad (2.1)$$

где T_0, u_0 — так называемое "среднее течение" [7], а черточками обозначены сопряженные величины.

При исследовании задачи распространения волн в рассматриваемой системе основной считается изгибная величина.

При подставлении (2.1) в (1.3)-(1.4) и приравнивании коэффициентов при одинаковых гармониках полученная система дает для первых членов (2.1)

$$T_0\approx-\frac{\chi\eta c}{A}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\ \frac{\partial u}{\partial x}\approx-k^2w_1\bar{w}_1e^{2\omega_0''t}(1+k^2h^2/6) \qquad (2.2)$$

При получении (2.2) принималось, что $\partial/\partial t\sim c\partial/\partial x$, где

$c = d(\mathrm{Re}\,\omega_0)/dk$ – групповая скорость (от линейной частоты $\omega = \omega_0' + i\omega_0''$) и высшими степенями при дифференцировании можно пренебречь по сравнению с низшими.

В предположении малости затухания η для линейной частоты принимается

$$\omega_0' = \frac{h\nu k^2}{2\sqrt{3}}, \quad \omega_0'' = \frac{1}{2B}\alpha(1+\nu)\chi\eta(\omega_0')^2 \tag{2.3}$$

далее имеем:

$$T_2 \approx -\frac{4}{A}\chi\eta k\omega u_2, \quad T_1 \approx \frac{1}{B}i\chi\eta k^2\omega w_1$$

$$u_2 \approx -\frac{1}{4}ikw_1^2\left[1 - \frac{h^2k^2}{12} + \frac{2}{A}i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0'\right]$$

которые для нелинейной частоты дают

$$\omega = \omega_0'\left\{1 - \frac{1}{2B}i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0' - \frac{1}{8}a^2k^2\left[\frac{7}{2} + \alpha(1+\nu)\chi\eta + \frac{1}{A}i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0'\right]\right\} \tag{2.4}$$

Здесь через a^2 обозначено

$$a^2 = 4w_1\overline{w}_1e^{2\omega_0'' t} \tag{2.5}$$

в отличие от предыдущих работ, например [8], наверное по аналогии с линейными колебаниями, целесообразнее экспоненциальный множитель включить в выражение амплитуды. И вот, что интересно. Наличие нового члена в первом уравнении (1.1) в дисперсионном уравнении (2.4) меняло (в нелинейной части, разумеется) значение действительной части: вместо 7/2 было бы 9/2 и что более важно, мнимая часть была бы с отрицательным коэффициентом, а это существенно при исследовании на устойчивость распространения.

В случае, когда пластинка изолирована от внешней среды $(s = 0)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_0}{\partial x} \approx -k^2 w_1 w_1 e^{2\omega_0'' t}\left[1 + k^2h^2/6 - \alpha(1+\nu)\chi\eta\right] \\
&T_2 \approx -\frac{1}{k}\eta\omega_0' u_2, \quad T_1 \approx \frac{1}{12}i\eta\omega_0' h^2 w_1 \\
&u_2 \approx -\frac{1}{4}ikw_1^2\left[1 - \frac{1}{12}h^2k^2 + \frac{1}{2k^2}i\alpha(1+\nu)\eta\omega_0'\right] \\
&\omega_0'' = -\frac{1}{24}\alpha(1+\nu)\eta h^2\omega_0'
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\omega = \omega_0'\left\{1 - \frac{i\alpha(1+\nu)\eta h^2\omega_0'}{24} - \frac{a^2k^2}{8}\left[\frac{7}{2} + \frac{2\alpha(1+\nu)\chi\eta}{3} + \frac{i\alpha(1+\nu)\eta\omega_0'}{4}\right]\right\} \tag{2.7}$$

3. Следующий вопрос по важности в задачах распространения волн — условие устойчивости волн модуляции. Без учета уравнений теплопроводности, как показано в [2], имеется неустойчивость. Но так как наличие температуры приводит в дисперсионном уравнении к мнимым частям (внутреннее затухание), они не меняют знак в зависимости от k и в обоих случаях они отрицательные ($\omega_0'' < 0$), то такой процесс по [9] является устойчивым.

Однако можно поступить и как в [8]. Если составить уравнение модуляции

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{2} i \frac{d^2\omega_0}{dk^2} - (D_2 - iD_1)\Psi|\Psi|^2 = 0, \quad |\Psi| = a \tag{3.1}$$

где ω_0 определяется по (2.3) и (2.6), а коэффициенты

$$D_1 = -7k^2/16, \quad D_2 = \begin{cases} -2\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0'/A \\ -\alpha(1+\nu)\eta\omega_0'/4 \end{cases} \tag{3.2}$$

то условие устойчивости (неустойчивости) по [8].

По [8] условие устойчивости волн модуляции есть

$$\Omega'' < 0, \quad \Omega = \Omega' + i\Omega'' \tag{3.3}$$

где частота определяется из следующего уравнения:

$$\begin{gathered} -i\Omega + iK\frac{d\omega_0'}{dk} = \frac{3}{2}D_2\psi_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}D_2\psi_0^2\right)^2 - \Delta} \\ \Delta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0'}{dk^2}K^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0'}{dk^2} + 2D_1\psi_0^2\right) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь ψ_0 — начальная амплитуда, K — волновое число огибающего.

Из (3.2) видно, что выражения D_1 и D_2 отрицательные, следовательно, Δ может менять знак и в связи с этим, при $\Delta < \frac{3}{2}\left(D_2\psi_0^2\right)^2$ будем иметь устойчивость, а при $\Delta > \left(3D_2\psi_0^2/2\right)^2$ возможна неустойчивость.

Как указывалось ранее, неучет инерционного члена от u меняет знак D_1, а учет нелинейного члена в первом уравнении (1.1) меняет знак D_2, следовательно, в этих случаях возможны другие условия устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрической оболочки // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1988. Т.41. № 3. С.3-6.
3. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки // Докл. АН Арм.ССР. 1971. Т.52. № 2. С.70-76.
4. Гнуни В.Ц. Об уравнеиях гибких пластин и оболочек // Тр.VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С.186-189.
5. Болотин В.В. Уравнение нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 2. С.361-363.
6. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине // Изв.НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. № 1. С.25-30.
9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.04.2000