ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №2, 2001** Механика

УДК 539.3

О ЧАСТОТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.

Լ. Ա. Աղալովյան, Լ.Գ. Ղուլղազարյան

Օրթոտրոպ սալի խառը եզրային խնդրում սեփական տատանումների հաճախությունների և սահմանային շերտի մասին

Ելնելով առաձգականության մաթեմատիկական տեսության եռաչափ խնդրի դինամիկ հավասարումներից՝ ասիմպտոտիկ եղանակով դուրս են բերված սալի սեփական տատանումների հաճախությունների որոշման հավասարումները: Ապացուցված է, որ գոյություն ունեն սեփական արժեքների երեք խումբ: Երկու խմբերը համապատասխանում են լայնական տատանումներին, իսկ երրորդը՝ երկայնական: Որոշված է սահմանային շերտի լուծումը, արտածված է բնութագրիչ հավասարում, որի արմատները որոշում են սահմանային շերտի մեծությունների մարման արագությունը: Ցույց է տրված, որ սեփական արժեքների յուրաքանչյուր խմբին համապատասխանում է սահմանային ֆունկցիաների իր դասը:

L. A. Aghalovian, L.G. Ghulghazaryan

About frequencies of free vibrations and boundary layer of orthotropic plate in the mixed boundary problem

Исходя из динамических уравнений трехмерной задачи математической теории упругости, асимптотическим методом выведены уравнения для определения частот собственных колебаний пластин. Доказано, что существуют три группы собственных значений для случая, когда одна из лицевых поверхностей свободна, а на другой поверхности заданы смешанные граничные условия. Двум группам собственных значений соответствуют сдвиговые колебания, а третьей группе – продольные колебания. Построено решение пограничного слоя, показано, что каждой частоте собственных колебаний соответствует свое семейство пограничных функций.

Собственные колебания ортотропной пластины, когда на одной из ее лицевых поверхностей заданы однородные условия относительно компонентов тензора напряжений, а на другой — однородные условия относительно вектора перемещения, рассмотрены в [1]. В данной работе, исходя из динамических уравнений трехмерной задачи математической теории упругости, асимптотическим методом выведены уравнения для определения частот собственных колебаний пластин при других, представляющих наибольший интерес, случаях граничных условий. Доказано, что существуют три группы собственных значений для случая, когда одна из лицевых поверхностей свободна, а на другой заданы смешанные граничные условия. Двум группам собственных значений соответствуют сдвиговые колебания, а третьей группе — продольные колебания. Построено решение пограничного слоя и показано, что каждой частоте собственных колебаний соответствует свое семейство пограничных функций.

1. Требуется определить ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи математической теории упругости для ортотропного тела [2,3] в области $D = \{x, y, z : x, y \in D_0, |z| \le h\}$, занятой

пластиной, где D_0 — срединная поверхность пластины, характерный размер которой ℓ ($h << \ell$), при следующих однородных условиях:
на лицевой поверхности $z=h$

$$\sigma_{xz}(h)=0, \quad \sigma_{yz}(h)=0, \quad \sigma_{zz}(h)=0 \tag{1.1}$$

на поверхности $z=-h$ одна из следующих трех групп условий:

$$1)\ W(-h)=0,\ \sigma_{xz}(-h)=0,\ \ \sigma_{yz}(-h)=0 \tag{1.2}$$

$$2)\ W(-h)=0,\ U(-h)=0,\ \ \sigma_{yz}(-h)=0 \tag{1.3}$$

$$3)\ W(-h)=0,\ \sigma_{xz}(-h)=0,\ \ V(-h)=0 \tag{1.4}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде:

$$U=\bar{u}(x,y,z)e^{i\omega t},$$

$$\sigma_{nm}=\sigma_{ik}(x,y,z)e^{i\omega t},\ \ n,m=x,y,z;\ \ i,k=1,2,3;\ \ (U,V,W) \tag{1.5}$$

Перейдем затем к безразмерным переменным $\xi=x/\ell$, $\eta=y/\ell$, $\zeta=z/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u=\bar{u}/\ell$, $\mathrm{v}=\bar{\mathrm{v}}/\ell$, $w=\bar{w}/\ell$. После подстановки (1.5) в динамические уравнения и замены переменных придем к следующей системе:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 u=0, \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial\eta}=a_{44}\sigma_{23}\\
\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 \mathrm{v}=0, \qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial\xi}=a_{55}\sigma_{13}\\
\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 w=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}\\
\frac{\partial u}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}, \qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}\\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}, \quad \omega_*^2=\rho h^2\omega^2, \quad \varepsilon=h/\ell
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Система (1.6) представляет собой сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений, решение которой будем искать в виде

$$\sigma_{ik}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ik}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\ u=\varepsilon^{s}u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta), \quad s=\overline{0,N} \quad (u,\mathrm{v},w) \tag{1.7}$$

где σ_{ik} — любая из компонент тензора напряжений. Подставив (1.7) в (1.6), получим систему для определения $\sigma_{ik}^{(s)}$, $u^{(s)},\mathrm{v}^{(s)},w^{(s)}$. Из этой системы все $\sigma_{ik}^{(s)}$ можно выразить через функции $u^{(s)},\mathrm{v}^{(s)},w^{(s)}$:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{12}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\Delta_{22}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}-\Delta_{23}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}\right]\\
\sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{33}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\Delta_{12}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}-\Delta_{13}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}\right]\\
\sigma_{33}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{11}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}-\Delta_{13}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\Delta_{23}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]
\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}\right],\qquad \sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$\Delta=a_{12}\Delta_{12}+a_{22}\Delta_{33}-a_{23}\Delta_{13}$, $\Delta_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, $\Delta_{22}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2$

$\Delta_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2$, $\Delta_{12}=a_{13}a_{23}-a_{12}a_{33}$, $\Delta_{13}=a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}$

$\Delta_{23}=a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}$

функции же $u^{(s)},v^{(s)},w^{(s)}$ определяются из уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_*^2u^{(s)}=R_u^{(s-1)},\quad \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\omega_*^2v^{(s)}=R_v^{(s-1)}$$

$$\Delta_{11}\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\omega_*^2w^{(s)}=R_w^{(s-1)}$$

$$R_u^{(s-1)}=-\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right] \tag{1.9}$$

$$R_v^{(s-1)}=-\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-a_{44}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$R_w^{(s-1)}=\Delta_{13}\frac{\partial^2 v^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}+\Delta_{23}\frac{\partial^2 u^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\Delta\left[\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

2. Для определения частот собственных колебаний рассмотрим соотношения и уравнения (1.8), (1.9) для исходного приближения $s=0$. Учитывая, что $R_j^{(m)}=0,\ j=u,v,w$ при $m<0$, имеем уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_*^2u^{(0)}=0$$

$$\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\omega_*^2v^{(0)}=0 \tag{2.1}$$

$$\Delta_{11}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\omega_*^2w^{(0)}=0$$

а для компонент тензора напряжений получим:

$$\sigma_{13}^{(0)}=\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{23}^{(0)}=\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{12}^{(0)}=0$$

$$\sigma_{22}^{(0)}=-\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{33}^{(0)}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{11}^{(0)}=-\frac{\Delta_{23}}{\Delta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\zeta} \tag{2.2}$$

Решения уравнений (2.1) будем искать в виде

$$u^{(0)}=u_1^{(0)}(\xi,\eta)u_0^{(0)}(\zeta),\ v^{(0)}=v_1^{(0)}(\xi,\eta)v_0^{(0)}(\zeta),\ w^{(0)}=w_1^{(0)}(\xi,\eta)w_0^{(0)}(\zeta) \tag{2.3}$$

В результате имеем

$$u^{(0)} = C_1^{(0)} \sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_* \zeta + C_2^{(0)} \cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_* \zeta$$

$$\mathrm{v}^{(0)} = C_3^{(0)} \sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_* \zeta + C_4^{(0)} \cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_* \zeta \qquad (2.4)$$

$$w^{(0)} = C_5^{(0)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_* \zeta + C_6^{(0)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_* \zeta$$

$$C_i^{(0)}(\xi,\eta) = u_1^{(0)} c_i^{(0)}, \quad C_k^{(0)}(\xi,\eta) = \mathrm{v}_1^{(0)} c_k^{(0)}$$

$$C_j^{(0)}(\xi,\eta) = w_1^{(0)} c_j^{(0)}, \quad i = 1,2; \ k = 3,4; \ j = 5,6 \qquad (2.5)$$

Рассмотрим данную задачу при граничных условиях (1.1), (1.2). По формулам (2.2) определяются компоненты тензора напряжений и, удовлетворяя этим граничным условиям, придем к трем независимым однородным алгебраическим системам уравнений. Из разрешимости этих систем (определители равны нулю), получим следующие характеристические уравнения и значения частот собственных колебаний. Возможны следующие четыре случая для сдвиговых собственных колебаний:

а) $\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \Rightarrow \quad \omega_{*n}^{(1)} = \pi n/\sqrt{a_{55}}$

$\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(2)} = \pi n/\sqrt{a_{44}} \qquad n \in N$ (2.6)

б) $\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}})$

$\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(2)} = \pi n/\sqrt{a_{44}} \qquad n \in N$ (2.7)

в) $\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(1)} = \pi n/\sqrt{a_{55}}$

$\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N$ (2.8)

г) $\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}})$

$\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N$ (2.9)

а для продольных собственных колебаний имеем:

$$\cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_* = 0 \ \Rightarrow \ \omega_{*n}^{(p)} = \pi(2n-1)\sqrt{\Delta_{11}/\Delta}/4 \quad n \in N \qquad (2.10)$$

Собственными функциями собственных сдвиговых колебаний являются

а) $u^{(0)} = C_{2n}^{(0)} \cos\pi n\zeta, \quad \mathrm{v}^{(0)} = C_{4n}^{(0)} \cos\pi n\zeta$ (2.11)

б) $u^{(0)} = C_{1n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2, \ \mathrm{v}^{(0)} = C_{4n}^{(0)} \cos\pi n\zeta$ (2.12)

в) $u^{(0)} = C_{2n}^{(0)} \cos\pi n\zeta, \quad \mathrm{v}^{(0)} = C_{3n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2$ (2.13)

г) $u^{(0)} = C_{1n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2, \quad \mathrm{v}^{(0)} = C_{3n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2$ (2.14)

а для собственных продольных колебаний:

$$w^{(0)} = \frac{C_{6n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4} \cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4 \qquad (2.15)$$

В случае граничных условий (1.1), (1.3), тем же способом можно получить частоты и функции собственных сдвиговых колебаний. Придем к следующим двум случаям:

а) $\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \Rightarrow \quad \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{55}}) \quad n \in N$ (2.16)

$$u^{(0)} = \frac{C_{2n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4} \cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

$$\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi n / \sqrt{a_{44}} \qquad n \in N \tag{2.17}$$

$$v^{(0)} = C_{4n}^{(0)} \cos \pi n \zeta$$

б) $$\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{55}}) \qquad n \in N \tag{2.18}$$

$$u^{(0)} = \frac{C_{2n}^{(0)}}{\cos \pi(2n-1)/4} \cos \pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

$$\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N \tag{2.19}$$

$$v^{(0)} = C_{3n}^{(0)} \sin \pi(2n-1)\zeta/2$$

а для продольных колебаний частоты определятся по формулам (2.10), а собственные функции — по формулам (2.15).

Граничным условиям (1.1), (1.4) соответствуют:

а) $$\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \Rightarrow \omega_{*n}^{(1)} = \pi n / \sqrt{a_{55}} \qquad n \in N \tag{2.20}$$

$$u^{(0)} = C_{2n}^{(0)} \cos \pi n \zeta$$

$$\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N \tag{2.21}$$

$$v^{(0)} = \frac{C_{4n}^{(0)}}{\cos \pi(2n-1)/4} \cos \pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

б) $$\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_* = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}}) \tag{2.22}$$

$$u^{(0)} = C_{1n}^{(0)} \sin \pi(2n-1)\zeta/2$$

$$\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega_* = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N \tag{2.23}$$

$$v^{(0)} = \frac{C_{4n}^{(0)}}{\cos \pi(2n-1)/4} \cos \pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

а для продольных колебаний частоты определятся по формулам (2.10), а собственные функции — по формулам (2.15).

3. Рассмотрим вклад высших приближений. Решение системы (1.9) будет зависеть от того, какое значение ω_* взято за основу вычислений, надо рассмотреть все варианты значений частот собственных сдвиговых и продольных колебаний. В результате общее решение системы (1.9) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
u^{(s)} &= \sum_{i=1,2,p} [C_{1in}^{(s)} \sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta + C_{2in}^{(s)} \cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta + \bar{u}_i^{(s)}] \\
v^{(s)} &= \sum_{i=1,2,p} [C_{3in}^{(s)} \sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta + C_{4in}^{(s)} \cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta + \bar{v}_i^{(s)}] \\
w^{(s)} &= \sum_{i=1,2,p} [C_{5in}^{(s)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta + C_{6in}^{(s)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta + \bar{w}_i^{(s)}]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \sum_{i=1,2,p} [\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)} (C_{1i}^{(s)} \cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta - C_{2i}^{(s)} \sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta) + \frac{\partial \bar{u}_i^{(s)}}{\partial \zeta}] +$$

$$+ \frac{1}{a_{55}} \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\sum_{i=1,2,p}[\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(i)}(C_{3i}^{(s)}\cos\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(i)}\zeta-C_{4i}^{(s)}\sin\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(i)}\zeta)+\frac{\partial\overline{v}_i^{(s)}}{\partial\zeta}]+$$
$$+\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\sum_{i=1,2,p}[\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(i)}(C_{5i}^{(s)}\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(i)}\zeta-C_{6i}^{(s)}\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(i)}\zeta)+$$
$$+\frac{\partial\overline{w}_i^{(s)}}{\partial\zeta}]-\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\Delta_{23}}{\Delta}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}$$

где $\overline{u}_i^{(s)},\overline{v}_i^{(s)},\overline{w}_i^{(s)}$ являются частными решениями соответствующих уравнений системы (1.9).

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2) и учитывая данные для исходного приближения, получим систему уравнений относительно неизвестных переменных $C_{ijn}^{(s)}$, откуда следует:

$$C_{1pn}^{(s)}=\frac{f_n^{(s)}(\xi,\eta,-1)+f_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(p)}\cos\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(p)}},\quad C_{2pn}^{(s)}=\frac{f_n^{(s)}(\xi,\eta,-1)-f_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(p)}\sin\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(p)}}\tag{3.2}$$

$$C_{3pn}^{(s)}=\frac{\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,-1)+\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(p)}\cos\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(p)}},\quad C_{4pn}^{(s)}=\frac{\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,-1)-\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(p)}\sin\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(p)}}\tag{3.3}$$

$$C_{51n}^{(s)}=\frac{\theta_n^{(s)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}+\psi_n^{(s)}(\xi,\eta)\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}}{\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}\cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}}$$
$$C_{61n}^{(s)}=\frac{\psi_n^{(s)}(\xi,\eta)\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}+\theta_n^{(s)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}}{\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}\cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(1)}}\tag{3.4}$$

где

$$f_n^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=-\sum_{i=1,2,p}\frac{\partial\overline{u}_i^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}-$$
$$-\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(2)}[C_{12n}^{(s)}\cos\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(2)}\zeta-C_{22n}^{(s)}\sin\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(2)}\zeta]$$

$$\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)=-\sum_{i=1,2,p}\frac{\partial\overline{v}_i^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}-$$
$$-\sqrt{a_{44}}\omega_{*}^{(1)}[C_{31n}^{(s)}\cos\sqrt{a_{55}}\omega_{*n}^{(1)}\zeta-C_{41n}^{(s)}\sin\sqrt{a_{44}}\omega_{*n}^{(1)}\zeta]$$

$$\theta_n^{(s)}(\xi,\eta)=[\Delta_{13}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\eta}-\Delta_{11}\sum_{i=1,2,p}\frac{\partial\overline{w}_i^{(s)}}{\partial\zeta}-\Delta_{23}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}]\Bigg|_{\zeta=1}-$$
$$-\sqrt{\Delta_{11}\Delta}\omega_{*n}^{(2)}(C_{52n}^{(s)}\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(2)}-C_{62n}^{(s)}\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(2)})\tag{3.5}$$
$$\psi_n^{(s)}(\xi,\eta)=-\sum_{i=1,2,p}\overline{w}_i^{(s)}(\zeta=-1)-C_{62n}^{(s)}\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(2)}+C_{52n}^{(s)}\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*n}^{(2)}$$

При граничных условиях (1.1), (1.3), после соответствующих преобразований формулы (3.3), (3.4) остаются неизменными, а для $C^{(s)}_{1pn}$, $C^{(s)}_{2pn}$ получим:

$$C^{(s)}_{1pn} = \frac{f^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n} + F^{(s)}_n(\xi,\eta)\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}}$$

$$C^{(s)}_{2pn} = \frac{f^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n} + F^{(s)}_n(\xi,\eta)\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}} \tag{3.6}$$

$$F^{(s)}_n(\xi,\eta) = -\sum_{i=1,2,p}\overline{u}^{(s)}_i(\zeta=-1) + C^{(s)}_{12n}\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(2)}_{*n} - C^{(s)}_{22n}\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(2)}_{*n}$$

При граничных условиях (1.1), (1.4) формулы (3.2), (3.4) остаются неизменными, а для $C^{(s)}_{3pn}$, $C^{(s)}_{4pn}$ получим:

$$C^{(s)}_{3pn} = \frac{\varphi^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n} + \sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}K^{(s)}_n(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}} \tag{3.7}$$

$$C^{(s)}_{4pn} = \frac{\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}K^{(s)}_n(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n} + \varphi^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}}$$

$$K^{(s)}_n(\xi,\eta) = -\sum_{i=1,2,p}\overline{v}^{(s)}_i(\zeta=-1) + C^{(s)}_{31n}\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(1)}_{*n} - C^{(s)}_{41n}\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(1)}_{*n}$$

Отсюда следует, что высшие приближения не влияют на частоты собственных колебаний, а влияют лишь на амплитуды этих колебаний. Отметим, что в приводимых решениях присутствуют неизвестные пока постоянные интегрирования. Они определяются известным способом [2] в ходе сращивания решений внутренней задачи и пограничного слоя.

4. Выясним вопрос существования и определим решение пограничного слоя при граничных условиях (1.1), (1.2). Построение решения погранслоя осуществим также, как в [2,4,5].

После подстановки (1.5) в динамические уравнения и замены переменной $\xi_1 = \xi/\varepsilon$ решение погранслоя будем искать в виде

$$\sigma_{ik} = \varepsilon^{-1+s}\sigma^{(s)}_{ikb}(\eta,\zeta)e^{-\lambda\xi_1}, \quad u = \varepsilon^s u^{(s)}_b(\eta,\zeta)e^{-\lambda\xi_1}$$

$$\xi_1 = \xi/\varepsilon = x/h, \quad s = \overline{0,N} \quad (u, \mathrm{v}, w) \tag{4.1}$$

В результате получим систему, где все $\sigma^{(s)}_{ikb}$ можно выразить через функции $u^{(s)}_b, \mathrm{v}^{(s)}_b, w^{(s)}_b$: (индекс "b" означает, что данная величина относится к погранслою (от слова "boundary"))

$$\sigma^{(s)}_{11b} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{12}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}_b}{\partial\eta} - \lambda\Delta_{22}u^{(s)}_b - \Delta_{23}\frac{\partial w^{(s)}_b}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma^{(s)}_{22b} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{33}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}_b}{\partial\eta} - \lambda\Delta_{12}u^{(s)}_b - \Delta_{13}\frac{\partial w^{(s)}_b}{\partial\zeta}\right] \tag{4.2}$$

$$\sigma^{(s)}_{33b} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{11}\frac{\partial w^{(s)}_b}{\partial\zeta} - \Delta_{13}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}_b}{\partial\eta} - \lambda\Delta_{23}u^{(s)}_b\right]$$

$$\sigma_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial u_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \lambda v_b^{(s)}\right], \quad \sigma_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda w_b^{(s)}\right]$$

$$\sigma_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_b^{(s-1)}}{\partial \eta}\right]$$

а для функций $u_b^{(s)}, v_b^{(s)}, w_b^{(s)}$ следующие уравнения:

$$\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2 \Delta_{22}}{\Delta} + \omega_*^2\right)u_b^{(s)} + \left(\frac{\lambda \Delta_{23}}{\Delta} - \frac{\lambda}{a_{55}}\right)\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} = R_1^{(s-1)}$$

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2}{a_{55}} + \omega_*^2\right)w_b^{(s)} + \left(\frac{\lambda \Delta_{23}}{\Delta} - \frac{\lambda}{a_{55}}\right)\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} = R_2^{(s-1)} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2}{a_{66}} + \omega_*^2\right)v_b^{(s)} = K_1^{(s-1)}$$

$$K_1^{(s-1)} = \frac{\lambda}{a_{66}}\frac{\partial u_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 w_b^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{22b}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$R_1^{(s-1)} = \frac{\lambda \Delta_{12}}{\Delta}\frac{\partial v_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_{12b}^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad R_2^{(s-1)} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}\frac{\partial^2 v_b^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{23b}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

Из (4.2) и (4.3) следующие уравнения составляют полную систему для определения величин $\sigma_{12b}^{(s)}$, $\sigma_{23b}^{(s)}$, $v_b^{(s)}$:

$$\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2}{a_{66}} + \omega_*^2\right)v_b^{(s)} = K_1^{(s-1)} \tag{4.4}$$

$$\sigma_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_b^{(s-1)}}{\partial \eta}\right], \quad \sigma_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial u_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \lambda v_b^{(s)}\right]$$

Решение этой системы называется решением типа антиплоского погранслоя. Общее решение дифференциального уравнения из (4.4) имеет вид $v_b^{(s)} = v_{b0}^{(s)} + v_b^{*(s)}$, где $v_{b0}^{(s)}$ — общее решение однородного уравнения, а $v_b^{*(s)}$ — частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим нулевое приближение $s=0$ для системы (4.4). Дифференциальное уравнение относительно $v_b^{(0)}$ преобразуется в обыкновенное однородное дифференциальное уравнение, решением которого будет:

$$v_b^{(0)} = C_{1ab}^{(0)}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)}\,\zeta + C_{2ab}^{(0)}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)}\,\zeta \tag{4.5}$$

Вычисляя значение напряжений из (4.4) и подставляя в граничные условия (1.1) и (1.2), придем к однородной алгебраической системе уравнений относительно $C_{1ab}^{(0)}(\eta)$ и $C_{2ab}^{(0)}(\eta)$. Из разрешимости этой системы получим характеристическое уравнение для определения значений показателя экспоненты λ.

Возможны следующие два случая:

1) $\cos\sqrt{a_{44}(\lambda^2/a_{66}+\omega_*^2)}=0 \Rightarrow$ (4.6)

$$\Rightarrow \lambda_{kn}=\sqrt{a_{66}(\pi^2(2k-1)^2-4\omega_{*n}^2 a_{44})/(4a_{44})} \quad k,n\in N$$

2) $\sin\sqrt{a_{44}(\lambda^2/a_{66}+\omega_*^2)}=0 \Rightarrow$ (4.7)

$$\Rightarrow \lambda_{kn}=\sqrt{a_{66}(\pi^2 k^2-\omega_{*n}^2 a_{44})/a_{44}} \quad k,n\in N$$

Собственными функциями $v_b^{(0)}$ являются соответственно

1) $v_b^{(0)}=C_{1abk}^{(0)}(\eta)\sin\dfrac{\pi(2k-1)}{2}\zeta$ (4.8)

2) $v_b^{(0)}=C_{2abk}^{(0)}(\eta)\cos\pi k\zeta$ (4.9)

Остальные уравнения из (4.3) и (4.4) составляют полную систему уравнений для определения $\sigma_{13b}^{(s)}, \sigma_{11b}^{(s)}, \sigma_{22b}^{(s)}, \sigma_{33b}^{(s)}, u_b^{(s)}$ и $w_b^{(s)}$. Решение этой системы называется решением типа плоского погранслоя. Из дифференциальных уравнений относительно $u_b^{(s)}, w_b^{(s)}$ вытекает дифференциальное уравнение четвертого порядка для $w_b^{(s)}$:

$$\Delta_{11}\Delta a_{55}\frac{\partial^4 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^4}+[(\lambda^2\Delta_{22}+\omega_*^2\Delta)\Delta_{11}a_{55}^2-\lambda^2(a_{55}\Delta_{23}-\Delta)^2+$$
$$+\Delta^2(\lambda^2+\omega_*^2 a_{55})]\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta a_{55}(\lambda^2\Delta_{22}+\omega_*^2\Delta)(\lambda^2+\omega_*^2 a_{55})w_b^{(s)}=R_3^{(s-1)} \tag{4.10}$$

$$R_3^{(s-1)}=\Delta a_{55}[(\lambda^2\Delta_{22}+\omega_*^2\Delta)a_{55}R_2^{(s-1)}-\frac{\partial R_1^{(s-1)}}{\partial\zeta}+\Delta\frac{\partial^2 R_2^{(s-1)}}{\partial\zeta^2}]$$

а для $u_b^{(s)}$ получим

$$u_b^{(s)}=S_1\frac{\partial^3 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^3}+S_2\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta}+S_3(R_1^{(s-1)}-\frac{\partial R_2^{(s-1)}}{\partial\zeta}) \tag{4.11}$$

$$S_1=\Delta\Delta_{11}/S, \quad S=\lambda(\lambda^2\Delta_{22}+\omega_*^2\Delta)(a_{55}\Delta_{23}-\Delta)$$

$$S_2=((\lambda^2+\omega_*^2 a_{55})\Delta^2-\lambda^2(a_{55}\Delta_{23}-\Delta)^2)/(a_{55}S), \quad S_3=\Delta^2/S$$

Общее решение дифференциального уравнения из (4.10) имеет вид $w_b^{(s)}=w_{b0}^{(s)}+w_b^{*(s)}$. Рассмотрим исходное приближение $s=0$. Уравнение (4.10) преобразуется в обыкновенное однородное дифференциальное уравнение, решением которого будет

$$w_b^{(0)}=C_{1pb}^{(0)}\cos\beta_1\lambda\zeta+C_{2pb}^{(0)}\sin\beta_1\lambda\zeta+C_{3pb}^{(0)}\cos\beta_2\lambda\zeta+C_{4pb}^{(0)}\sin\beta_2\lambda\zeta \tag{4.12}$$

$$\beta_{1,2}^2=\frac{(\Delta_{22}\Delta_{11}a_{55}^2+\Delta^2-(a_{55}\Delta_{23}-\Delta)^2+\mu^2\Delta a_{55}(\Delta_{11}a_{55}+\Delta)\pm\sqrt{D}}{2\Delta_{11}\Delta a_{55}}$$

$$D=(\Delta_{22}\Delta_{11}a_{55}^2+\Delta^2-(a_{55}\Delta_{23}-\Delta)^2+\mu^2\Delta a_{55}(\Delta_{11}a_{55}+\Delta))^2-$$
$$-4\Delta_{11}\Delta^2 a_{55}^2(\Delta_{22}+\Delta\mu^2)(1+a_{55}\mu^2), \qquad \mu=\frac{\omega_*}{\lambda} \tag{4.13}$$

Из (4.11) для $u_b^{(0)}$ получим

$$u_b^{(0)} = \lambda(\beta_1(S_1\lambda^2\beta_1^2 - S_2)(C_{1pb}^{(0)} \sin\beta_1\lambda\zeta - C_{2pb}^{(0)} \cos\beta_1\lambda\zeta) + \\ + \beta_2(S_1\lambda^2\beta_2^2 - S_2)(C_{3pb}^{(0)} \sin\beta_2\lambda\zeta - C_{4pb}^{(0)} \cos\beta_2\lambda\zeta)) \tag{4.14}$$

Подставляя (4.12), (4.14) в (4.2) и в граничные условия (1.1), (1.2), придем к алгебраической системе однородных уравнений, из условия разрешимости которой получится характеристическое уравнение для определения λ

$$(\lambda^2\Delta_{22} + \rho\omega_*^2\Delta)((A_1A_4 + A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 - \beta_2) + \\ + (A_1A_4 - A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 + \beta_2)) = 0 \tag{4.15}$$

$$A_1 = \lambda\beta_1^2(S_1\lambda^2\beta_1^2 - S_2) - 1, \quad A_3 = \beta_1(\Delta_{23}\lambda(S_1\lambda^2\beta_1^2 - S_2) - \Delta_{11})$$

$$A_2 = \lambda\beta_2^2(S_1\lambda^2\beta_2^2 - S_2) - 1, \quad A_4 = \beta_2(\Delta_{23}\lambda(S_1\lambda^2\beta_2^2 - S_2) - \Delta_{11})$$

Для ортотропных материалов $\Delta > 0$, в силу чего уравнение (4.15) упростится:

$$(A_1A_4 + A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 - \beta_2) + (A_1A_4 - A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 + \beta_2) = 0 \tag{4.16}$$

В уравнение (4.16) в качестве параметра входит ω и каждому его значению из (2.6)-(2.10) будет соответствовать счетное множество λ. В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться теми значениями λ, у которых $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Таким образом, каждому собственному значению ω соответствует свое семейство пограничных функций.

Аналогичным образом определяется решение пограничного слоя при граничных условиях (1.1)-(1.3) и (1.1)-(1.4).

Сопряжение решений пограничного слоя и внутренней задачи, в частности, можно осуществить методом наименьших квадратов или методом граничной коллокации [2,3].

Литература

1. Агаловян М.Л. К определению частот собственных колебаний и собственных функций в пространственной смешанной краевой задаче для пластин // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ, 1997, с. 128-131.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.:Наука, 1997. 415 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука,1977. 416с.
4. Агаловян М.Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. с. 131-135.
5. Гулгазарян Л.Г. О пограничном слое в задаче о собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями // В сб. научн. тр.: Математический анализ и его приложения. Ереван, "Манкаварж", 2000. Вып. 1, с.110-117.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
7.02.2001