ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3.01

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Шавлакадзе Н.Н.

Ն.Ն. Շավլակաձե
Առաձգական ներդիրով կլոր սալի ծռումը

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական ներդիրով կլոր սալի ծռման կոնտակտային խնդիրը: Սալի եզրը կոշտ ամրակցված է: Ներդիրի և սալի փոխազդեցության անհայտ ճիգի նկատմամբ ստացվում է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում: Երբ ներդիրի կոշտությունը փոխվում է հատուկ օրենքով, այսինքն երբ սինգուլյար օպերատորի գործակիցը դառնում է բարձր կարգի զրո ինտեգրման տիրույթի ծայրակետերում, հավասարումը մի կողմից բերվում է համարժեք Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման, իսկ մյուս կողմից համարժեք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Հետազոտվում է այդ համակարգի ռեգուլյարությունը:

N.N.Shavlakadze
Bending of Circular Plate with Inclusion

В работе рассматривается контактная задача изгиба круглой пластинки с упругим включением. Граница пластинки жестко заделана. Относительно неизвестного контактного усилия взаимодействия включения с пластинкой получается сингулярное интегро-дифференциальное уравнение. При изменении жесткости включения специальным законом, т.е. когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль высокого порядка в концах промежутка интегрирования, уравнение сводится, с одной стороны, к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, а с другой стороны, к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Исследуется эта система на регулярность.

Контактные задачи об изгибе конечных изотропных пластин, подкрепленных тонкими включениями или накладками (жесткими или упругими), рассмотрены в работах [1—4]. Эти задачи сведены к системам интегральных уравнений, характеристическая часть которых в общем случае имеет вид:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau)^2}{2}\left[\frac{a\,\mathrm{sgn}(t-\tau)}{2}+\frac{b}{\pi i}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\right]\varphi(\tau)d\tau=f(t),\qquad |t|<1 \tag{1}$$

и решение которого разыскивалось в классе функции с неинтегрируемыми особенностями с использованием аппарата регуляризации расходящихся интегралов [5].

В данной работе исследована контактная задача круглой пластинки с упругой накладкой переменной изгибной жесткости. Задача сведена к решению интегрального уравнения, характеристической частью которого является интегро-дифференциальное уравнение Прандтля, которое в некоторых условиях изучено в [6—9]. Но когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль любого порядка в концах линии интегрирования, оно эквивалентно сводится к интегральному уравнению третьего рода. Нами исследованы интегро-дифференциальные уравнения с такими коэффициентами, в некоторых условиях получены эффективные решения, установлены асимптотические оценки решения таких уравнений, на основе которого получены поведения неизвестных контактных усилий в концах упругих накладок [10—12].

Рассмотрим задачу об изгибе круглой изотропной пластинки единичного радиуса, подкрепленной тонким упругим включением переменной изгибной жесткости по отрезку: $y=0, |x|<a \ (a<1)$. К пластинке приложена нормальная нагрузка постоянной интенсивности q, а включение свободно от нагружения. Граница пластинки жестко заделана.

Введем обозначения: $\Omega=\{(x,y)\}\,|\,x^2+y^2<1\}$, $\Gamma=\partial\Omega$, $S=\Omega\setminus[-a,a]$. Требуется найти контактные условия взаимодействия включения с пластинкой. Поставленные задачи эквивалентны отысканию решения неоднородного бигармонического уравнения:

$$D\Delta\Delta\omega(x,y)=q, \quad (x,y)\in S \tag{2}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\omega=0, \ \partial\omega/\partial n=0, \ (x,y)\in\Gamma \tag{3}$$

и условиям на включение в силу симметрии задачи относительно прямой $y=0$:

$$\langle w\rangle=\langle w'_y\rangle=\langle M_y\rangle=0, \ \langle N_y\rangle=\mu(x), \ \mu(x)=\mu(-x), \ |x|<a, \ |y|=0 \tag{4}$$

Здесь использовано обозначение: $\langle f\rangle=f(x-0)-f(x+0)$, ω – прогиб пластинки, D – цилиндрическая жесткость пластинки, ω'_y, M_y, N_y – соответственно угол поворота, изгибающий момент и обобщенная поперечная сила в пластинке, $\mu(x)$ – неизвестное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем $\mu(x)\equiv 0$ при $|x|>a$, n – внешняя нормаль границы пластинки.

Считая концы включения свободными, относительно прогиба включения $\omega_0(x)$ получаются следующие условия:

$$\frac{d^2}{dx^2}D_0(x)\frac{d^2\omega_0(x)}{dx^2}=-\mu(x), \quad |x|<a \tag{5}$$

$$D_0(x)\omega_0''(x)\Big|_{x=\pm a}=0, \quad \left[D_0(x)\omega_0''(x)\right]'\Big|_{x=\pm a}=0 \tag{6}$$

где $D_0(x)=E_0(x)h_0^3(x)/12$ – жесткость включения на изгиб, $E_0(x)$ – модуль упругости ее материала, $h_0(x)$ – ее толщина.

Условия (6) эквивалентны обычным статическим условиям равновесия включения:

$$\int_{-a}^{a}\mu(t)dt=0, \quad \int_{-a}^{a}t\mu(t)dt=0 \tag{7}$$

На участке контакта $[-a,a]$ упругого включения с пластинкой выполняется условие

$$\omega(x,0)=\omega_0(x) \tag{8}$$

Решение краевой задачи (2)-(8) будем искать в Банаховом пространстве $W(\Omega)$ функций $\omega(x,y)$, удовлетворяющих условиям (3), имеющих суммируемые вторые производные с нормой

$$\|\omega\|_W = \left(\iint_\Omega \left[(\Delta\omega)^2 - 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x \partial y}\right)^2 \right) \right] d\Omega \right)^{1/2}$$

С точки зрения механики это пространство описывает класс функций прогибов, для которых потенциальная энергия изгиба пластинки положительна и конечна. Доказывается, что в этом классе поставленная задача (2)-(8) имеет единственное решение.

Общее решение уравнения (2) представляется в виде:

$$\omega(x,y) = \omega_1(x,y) + \omega_2(x,y)$$

где $\omega_1(x,y)$ – частное решение, например, $\omega_1(x,y) = = q(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)/64D$, а $\omega_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению: $\Delta\Delta\omega_2 = 0$ с неоднородными граничными условиями:

$$\omega_2 = -\omega_1, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial n} = -\frac{\partial\omega_1}{\partial n}, \quad (x,y) \in \Gamma \tag{9}$$

Как известно [13], бигармоническая функция представляется формулой Гурса:

$$\omega_2(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] \tag{10}$$

где $\varphi(z), \chi(z)$ – функции комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфные в S. Для изгибающих моментов M_x и M_y, скручивающего момента H_{xy} и перерезывающих сил N_x, N_y имеют место формулы [14]:

$$\begin{aligned} &M_y - M_x + 2iH_{xy} = 4(1-\sigma)D\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] \\ &M_x + M_y = -8(1+\sigma)D\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z), \ N_x - iN_y = -8D\varphi''(z) \end{aligned} \tag{11}$$

где $\psi(z) = \chi'(z)$, σ – коэффициент Пуассона.

Введем в рассмотрение новую функцию $\Omega_0(z)$ равенством

$$\Omega_0(z) = z\varphi'(z) + \psi(z)$$

тогда из первых двух условий (4) получается

$$\left[\varphi(t) - \overline{\Omega_0(t)}\right]^- - \left[\varphi(t) - \overline{\Omega_0(t)}\right]^+ = 0, \quad t \in (-a,a)$$

откуда имеем

$$\varphi(z) - \overline{\Omega_0(\bar{z})} = F_{01}(z), \quad z \in \Omega \tag{12}$$

где функция $F_{01}(z)$ голоморфна в области Ω.

Учитывая формулы (11), из двух последних условий (4) имеем

$$\begin{aligned} &\left[\varphi''(t) + \overline{\varphi''(t)}\right]^- - \left[\varphi''(t) + \overline{\varphi''(t)}\right]^+ = 0 \\ &\left[\varphi''(t)\overline{-\varphi''(t)}\right]^- - \left[\varphi''(t) - \overline{\varphi''(t)}\right]^+ = \frac{i\mu(t)}{4D} \end{aligned} \quad |t| < a$$

Складывая последние условия, получим:

$$\varphi''^{+}(t) - \varphi''^{-}(t) = -\frac{i\mu(t)}{8D} \quad |t| < a \tag{13}$$

Функция $\mu(t)$ может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте $[-a,a]$, учитывая проведенные в [4] доказательства о перенесенных результатах монографий [15] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [5], тогда решение граничной задачи (13) дается формулой:

$$\varphi''(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{\mu(t)dt}{t-z} + F_{02}(z), \quad z \in \Omega \tag{14}$$

где $F_{02}(z)$ – голоморфная функция в области Ω.

На основании формул (12), (14), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представляются следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}(t-z)\ln(t-z)\mu(t)dt + F_1(z)\\ \psi(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t\ln(t-z)\mu(t)dt + F_2(z) \qquad z \in \Omega\end{gathered} \tag{15}$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ – голоморфные в Ω функции, подлежащие определению.

Для определения этих функций в силу условий (9) на границе круга, получается следующее граничное условие:

$$F_1(t) + t\overline{F_1'(t)} + \overline{F_2(t)} = -f_1(t) - t\overline{f_1'(t)} - \overline{f_2(t)} - qt/16D \tag{16}$$

где

$$f_1(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}(t-z)\ln(t-z)\mu(t)dt, \quad f_2(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t\ln(t-z)\mu(t)dt$$

– аналитические функции в области S.

Переходя к сопряженным значениям в условии (16), по формуле Коши имеем:

$$\begin{gathered}F_1(z) + \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_0' = -z\overline{f_1'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \overline{f_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - \frac{qz}{16D}\\ \bar{a}_0 + \frac{F_1'(z)}{z} - \frac{a_1}{z} + F_2(z) = -f_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\end{gathered} \tag{17}$$

где постоянные a_1, a_2, a_0, a_0' – коэффициенты разложения функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ (т.е. $F_1(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, $F_2(z) = a_0' + a_1' z + \ldots$), они определяются из следующих соотношений:

$$a_0 + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_0' = 0, \quad a_1 + \bar{a}_1 = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t^2\mu(t)dt - \frac{q}{16D}, \quad 2a_2 = \frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t^3\mu(t)dt$$

Предыдущие формулы показывают, что если функция $\mu(t)$ найдена, то определены постоянные a_2 и $\mathrm{Re}\,a_1$, поэтому, как и следовало ожидать, функция $\varphi(z)$ определяется с точностью до выражения $Ciz + \gamma$, где C – действительная, а γ – комплексная произвольные постоянные, а функция $\psi(z)$ – с точностью комплексного постоянного γ'.

Из формул (17) определяются искомые функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$:

$$
\begin{aligned}
F_1(z) &= -\bar{a}_1 z - 2\bar{a}_2 - \bar{a}_0' - z\bar{f}_1(1/z) - \bar{f}_2(1/z) - qz/16D \\
F_2(z) &= -a_0 + (a_1 + \bar{a}_1)/z - \bar{f}_1(1/z) + \bar{f}_1'(1/z)/z - \bar{f}_1''(1/z)/z^2 - \\
&\quad - \bar{f}_2'(1/z)/z^3 + q/16Dz
\end{aligned} \tag{18}
$$

Приняв во внимание последние формулы, условие контакта (8) и формулу (15), дифференциальное уравнение изгиба включения (5) примет вид:

$$
\frac{1}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\ln|t-x|\mu(t)dt - \frac{1}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\ln|tx-1|\mu(t)dt - \frac{2x^2-1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^2\mu(t)}{tx-1}dt +
$$

$$
+\frac{3x^2-1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^2\mu(t)}{(tx-1)^2}dt + \frac{x-2x^3}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^3\mu(t)}{(tx-1)^2}dt + \frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^4\mu(t)}{(tx-1)^2}dt -
$$

$$
-\frac{q}{8D} - 2\,\mathrm{Re}\,a_1 = -\frac{1}{D_0(x)}\int_{-a}^{x}dt\int_{-a}^{t}\mu(\tau)d\tau
$$

Вводя обозначение: $\lambda(x) = \int_{-a}^{x}dt\int_{-a}^{t}\mu(\tau)d\tau$, приходим к интегро-дифференциальному уравнению:

$$
\lambda(x) - \frac{D_0(x)}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda'(t)dt}{t-x} + \frac{D_0(x)}{8\pi D}\int_{-a}^{a}R(x,t)\lambda'(t)dt = f_0 D_0(x), \quad |x| < a \tag{19}
$$

при условии

$$
\lambda(\pm a) = 0, \quad \lambda'(\pm a) = 0 \tag{20}
$$

где

$$
R(x,t) = \frac{x}{tx-1} + \frac{(2x^2-1)t^2 x}{2(tx-1)^2} + \frac{2t(3x^2-1) - (x-2x^3)(t^3x-3t^2) - 2t^3(tx-2)}{2(tx-1)^3} -
$$

$$
-2t, \quad f_0 = q/16D
$$

Когда коэффициент при сингулярном операторе в (19) изменяется по следующему закону: $D_0(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\,d(x)$, ($d(x)$ — любая непрерывная функция на сегменте $[-a,a]$, $d(x) > 0$), уравнение (19)-(20) можно свести к квазирегулярному интегральному уравнению [8]. Весьма простым способом, изложенным в работах [6–7], можно получить регулярное интегральное уравнение, эквивалентное интегро-дифференциальному уравнению (19)-(20), которое допускает эффективное решение, когда $d(x)$ — рациональная функция.

Уравнение (19) запишем в следующем виде:

$$
K\lambda \equiv \Pi\lambda + R\lambda = f_0 \tag{21}
$$

где Π — характеристическая часть оператора K, т.е.

$$
\Pi\lambda = \frac{\lambda(x)}{D_0(x)} - \frac{\lambda_0}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda'(t)dt}{t-x}, \quad |x| < a, \quad \lambda_0 = \frac{1}{8D}
$$

$$R\lambda=\int_{-a}^{a}R_0(x,t)\lambda(t)dt,\quad R_0(x,t)=-R_t'(x,t)$$

Перепишем (21) в виде

$$\Pi\lambda=f_0-R\lambda$$

и решим предыдущее уравнение, как если бы правая часть была заданной функцией. В работе [10] доказано, что последнее уравнение имеет единственное решение и оно представляется в явном виде при коэффициенте: $D_0(x)=d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}$, $d_0=\text{const}$, $n\geq 1$ – натуральное число. (Метод построения решения проходит и в том случае, когда $D_0(x)=(a^2-x^2)^{n+1/2}P(x)$, где $P(x)$ – рациональная функция).

На основании результатов [10] имеем:

$$\lambda(x)+K^*R\lambda=K^*f_0+\int_0^x\frac{\cos[Q(t)-Q(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\frac{1}{(a-t)^k}-\frac{1}{(a+t)^k}\right]dt \quad (22)$$

где

$$K^*g=-\frac{1}{\lambda_0}\int_0^x\sin[Q(t)-Q(x)]g(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi\lambda_0}\int_0^x\frac{\cos[Q(t)-Q(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\left[\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}g(\tau)d\tau}{\tau-t}\right]dt$$

$$K^*f_0=-\frac{f_0}{\lambda_0}\int_0^x\sin[Q(t)-Q(x)]g(t)dt-\frac{f_0}{\lambda_0}\int_0^x\frac{t\cos[Q(t)-Q(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}dt$$

$$Q(x)=\frac{1}{\lambda_0}\int_0^x\frac{dt}{D_0(t)}$$

A_k $(k=1,2,...,n)$ – неизвестные постоянные.

К уравнению (22) следует присоединить еще следующую систему уравнений:

$$\lim_{|z+a|\to 0}\left\{\frac{\lambda_0 i}{a}F_\lambda(0)D_0(0)+i\lambda_0\int_0^z A_\lambda'(t)e^{iQ(t)}dt\right\}=$$

$$=\lim_{z+a\to 0}\left\{\Phi(0)+\frac{\lambda_0 i}{a}F_{f_0}(0)D_0(0)+i\lambda_0\int_0^z A_{f_0}'(t)e^{iQ(t)}dt\right\} \quad (23)$$

$$\frac{2\pi(2j-2)}{2n-1}\leq\arg(z+a)<\frac{2\pi(2j-1)}{2n-1},\quad j=1,2,...,n$$

где

$$\Phi(0)=-\lim_{|z|\to\infty}\int_0^z\frac{F_{f_0}(t)-F_\lambda(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}e^{iQ(t)}dt$$

$$F_{f_0}(z)=\frac{f_0}{2\lambda_0}(\sqrt{z^2-a^2}-z)+\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\frac{1}{(a-z)^k}-\frac{1}{(a+z)^k}\right] \qquad (24)$$

$$F_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi\lambda_0}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-z}\left[\int_{-a}^{a}R_0(t,s)\lambda(s)ds\right]dt$$

$$A_{f_0}(z)=d_0(a^2-z^2)^n F_{f_0}(z),\ A_\lambda(z)=d_0(a^2-z^2)^n F_\lambda(z)$$

$$\lambda(0)=2\Phi_+(0),\ \Phi(z)=e^{-iQ(z)}\left[\Phi(0)+\int_0^x\frac{F_{f_0}(t)-F_\lambda(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}e^{iQ(t)}dt\right]$$

Таким образом, исходное интегро-дифференциальное уравнение эквивалентно уравнению (22) и совокупности уравнений (23)-(24). Уравнение (21) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода, его можно преобразовать следующим образом:

$$\lambda(x)+d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}\int_{-a}^{a}D(x,t)\lambda(t)dt=d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}g(x),\quad |x|<a \qquad (25)$$

где

$$D(x,t)=R_0(x,t)-\frac{[a^{2n+1}R(0,t)+K_1(x,t)+L_1(x,t)/\pi]\cos Q(x)}{(a^2-x^2)^{n+1/2}}-$$

$$-\frac{[a^{2n}L(0,t)/\pi+K_2(x,t)+L_2(x,t)/\pi]\sin Q(x)}{(a^2-x^2)^{n+1/2}}$$

$$g(x)=f_0+\frac{\left[\lambda(0)-d_0a^{2n+1}f_0-\int_0^x B_1'(t)\cos Q(t)dt-\lambda_0\int_0^x B_2'(t)\sin Q(t)dt\right]}{d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}}\times$$

$$\times\cos Q(x)+\frac{\left[-\int_0^x B_1'(t)\sin Q(t)dt+\lambda_0\int_0^x B_2'(t)\cos Q(t)dt\right]\sin Q(x)}{d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}}$$

$$B_1(t)=f_0(a^2-t^2)^{n+1/2},\ B_2(t)=(a^2-t^2)^n\left\{-\frac{f_0}{\lambda_0}t+\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\frac{1}{(a-t)^k}-\frac{1}{(a+t)^k}\right]\right\}$$

$$K_1(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n R_0(t,s)\right]_t'\cos Q(t)dt$$

$$L_1(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n L(t,s)\right]_t'\sin Q(t)dt$$

$$K_2(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n R_0(t,s)\right]_t'\sin Q(t)dt$$

$$L_2(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n L(t,s)\right]_t'\cos Q(t)dt$$

$$L(t,s)=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}R_0(\tau,s)}{t-\tau}d\tau$$

Заметим, что $D(x,t)$, по крайней мере, дважды дифференцируемая функция в квадрате $-a\le(x,t)\le a$, а $g(x)$ – на интервале $[-a,a]$

Переходя к промежутку (-1, 1) с помощью замены $x=ay,\ t=a\tau$, из (25) получим уравнение:

$$\lambda_0(y)+\nu_0(1-y^2)^{n+1/2}\int_{-1}^{1}D_0(y,\tau)\lambda_0(\tau)d\tau=\nu_0(1-y^2)^{n+1/2}g_0(y),\ |y|<1 \quad (26)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda_0(y)\equiv\lambda(ay),\ D_0(y,\tau)\equiv D(ay,a\tau),\ g_0(y)\equiv f(ay),\ \nu_0\equiv d_0a^{2n+1}$$

Теперь изложим методику сведения последнего интегрального уравнения к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С указанной целью, исходя из асимптотического поведения решения характеристического уравнения [10], решение представим бесконечным рядом:

$$\lambda_0(y)=(1-y^2)^{n+1/2}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}P_{2k}^{(n+1/2,n+1/2)}(y) \quad (27)$$

с неизвестными коэффициентами a_{2k}, $(k=0,1,...)$ из пространства ограниченных числовых последовательностей, $P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(y)$ – полиномы Якоби, $(P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(y)=P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(-y))$.

Далее, (27) подставим в уравнение (26), умножим последнее равенство на $P_{2m}^{(n+1/2,n+1/2)}(y)$, проинтегрируем от -1 до 1, примем во внимание условие ортогональности полиномов Якоби [16], для определения неизвестных коэффициентов a_{2k} получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)}{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}a_{2m}+\nu_0\sum_{k=0}^{\infty}D_{2k,2m}a_{2k}=g_{2m},\quad m=0,1,... \quad (28)$$

где

$$D_{2k,2m}=\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{n+1/2}P_{2m}^{(n+1/2,n+1/2)}(y)dy\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{n+1/2}P_{2k}^{(n+1/2,n+1/2)}(\tau)D_0(y\tau)d\tau$$

$$g_{2m}=\nu_0\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{n+1/2}P_{2m}^{(n+1/2,n+1/2)}(y)g_0(y)dy$$

Теперь приступим к исследованию бесконечной системы (28) на регулярность, для этого ее перепишем в следующем виде:

$$a_{2m}-\nu_0\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{D}_{2k,2m}a_{2k}=\widetilde{g}_{2m},\quad m=0,1,... \quad (29)$$

где

$$\widetilde{D}_{2k,2m}=\frac{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)}D_{2k,2m}$$

$$\widetilde{g}_{2m}=\frac{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)}g_{2m}$$

Применяя формулу Стирлинга для Гамма-функции и формулу Родрига для многочленов Якоби [17], получим:

$$\frac{\Gamma^2(2m+n+3/2)}{(2m!)\Gamma(2m+2n+2)}\to 1 \text{ при } m\to\infty$$

$$g_{2m}=\frac{\nu_0}{2^2 2m(2m-1)}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{n+5/2}P_{2m-2}^{(n+5/2,n+5/2)}(y)\frac{\partial^2 g_0(y)}{\partial y^2}dy$$

$$D_{2k,2m}=\frac{1}{2^4 2k(2k-1)2m(2m-1)}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{n+5/2}P_{2m-2}^{(n+5/2,n+5/2)}(y)dy\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{n+5/2}P_{2k-2}^{(n+5/2,n+5/2)}(\tau)\frac{\partial^4 D_0(y,\tau)}{\partial y^2\partial\tau^2}d\tau$$

Эти представления позволяют утверждать, что

$$\sum_{k,m=0}^{\infty}\widetilde{D}_{2k,2m}^2<\infty,\quad \sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{g}_{2m}^2<\infty$$

Таким образом, бесконечная система (28) при любом $\nu_0>0$ квазивполне регулярна [17].

Правую часть системы (29) можно представить в виде

$$\widetilde{g}_{2m}=\widetilde{g}_{2m}^{f}+\lambda(0)\widetilde{g}_{2m}^{i}+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{g}_{2m}^{i}A_i,\quad m=0,1,...$$

Решение бесконечной системы при правой части, равной $\widetilde{g}_{2m}^{f}$, обозначим через a_{2m}^{f}, при первой части $\widetilde{g}_{2m}^{0}$ – через a_{2m}^{0}, а при правой части $\widetilde{g}_{2m}^{i}$ – через a_{2m}^{i}, тогда

$$a_{2m}=a_{2m}^{f}+\lambda(0)a_{2m}^{0}+\sum_{i=1}^{n}a_{2m}^{i}A_i,\qquad m=0,1,...$$

Подставляя эти формулы в (23)-(24), получается конечная система алгебраических уравнений относительно постоянных $\lambda(0)$, $\Phi(0)$, A_i $(i=1,2,...,n)$.

Теорема единственности поставленной задачи, эквивалентность исходного интегро-дифференциального уравнения (19)-(20), с одной стороны, к интегральному уравнению (25) Фредгольма второго рода, а с другой стороны, к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (29), позволяют сделать заключение:

Однородная система уравнений, соответствующая системе (29), имеет в l_2 тривиальное решение, а неоднородная система (29) имеет единственное решение, каковой бы ни была последовательность правых частей из l_2 [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах пластин с трещинами и тонкими включениями //Изв.АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С.141-150.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. Онищук О.В., Попов Г.Я., Процеров Ю.С. О некоторых контактных задачах для подкрепленных пластин // ПММ.1984. Т. 48. №2. С. 307-314.
4. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностяхконтактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т.50. № 2. С.293-302.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
6. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // ПММ. 1945. Т.9. № 2. С.143-150.
7. Магнарадзе А.Г. Об одном интегральном уравнении теории крыла самолета // Сообщ. АН ГССР. 1942. Т.3. № 6. С.503-508.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
9. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 254 с.
10. Shavlakadze N. On some contact problems for bodies with elastic inclusion // Georg. Math. J. 1998. V.5. № 3. PP.285-300.
11. Shavlakadze N. A contact problem of the Interection of a semi-finite inclusion with a plate // Georg.Math. J. 1999. V.6. № 5. PP.489-500.
12. Shavlakadze N. On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Prof. of A. Razmadze math. Inst. 1999. 120. PP.135-147.
13. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
14. Фридман М.М. О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит //ПММ. 1941.Т.5. № 1. С.93-102.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
17. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Тбилисский математический
институт им. А.М. Размадзе

Поступила в редакцию
26.12.2000