ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ УПРУГОГО КЛИНА

Белубекян В.М., Белубекян М.В., Терзян С.А.

Վ.Մ. Բելուբեկյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան, Ս.Հ. Թերզյան

Առաձգական սեպի գագաթի շրջակայքում լարվածային վիճակը

Սեպի եզակիության որոշման խնդիրը սովորաբար լուծվում է գլանային կոորդինատական համակարգում: Ռ. Ալեքսանյանի կողմից առաջարկված է անիզոտրոպ սեպի խնդրի լուծման մեթոդ ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում: Այստեղ այդ մեթոդը կիրառվում է իզոտրոպ սեպի համար, որի միջոցով հնարավոր է որոշել լոգարիթմական եզակիությունը:

V.M. Belubekyan, M.V. Belubekyan, S.H. Terzyan

Stress State in the Vicinity of the elastic wedge vertex

Задача определения особенности у вершины клина обычно решается в цилиндрической системе координат. Р. Алексаняном [1,2] предложен метод решения задач анизотропного клина в прямоугольной системе координат. Этот метод используется здесь для случая изотропного клина. Оказывается, что метод Алексаняна существенно упрощает решения задач изотропного клина в случаях , когда хотя бы одна из граней клина закреплена. Кроме того, решение в прямоугольной системе координат позволяет установить возможность появления логарифмической особенности.

1.Рассматривается задача плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния бесконечного упругого клина с однородными граничными условиями на гранях. Уравнения равновесия в прямоугольной декартовой координатной системе имеют вид

$$\Delta u+\frac{2}{k-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{1.1}$$

$$\Delta v+\frac{2}{k-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

Здесь u, v – перемещения, $k=3-4\nu$ для задач плоской деформации и $k=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ – для задач обобщенного плоского напряженного состояния.

Решение системы (1.1), следуя работе Р. Алексаняна [2], представляется в виде

$$u=A(x+\beta y)^{\lambda},\quad v=B(x+\beta y)^{\lambda} \tag{1.2}$$

Подстановка (1.2) в систему (1.1), показывает, во-первых, что случай $\lambda\to 1$ следует исследовать отдельно. Согласно итоговой статье G.B.Sinclair [3] при $\lambda\to 1$ возможно появление логарифмической особенности. Во-вторых, получается, что характеристическое уравнение имеет кратные корни.

$$\beta=\pm i \tag{1.3}$$

При наличии кратных корней недостающее линейно-независимое решение можно найти путем предельного перехода, например,

$$\lim_{\gamma\to 1}\frac{(x\pm iy)^{\lambda}-(x\pm i\gamma y)^{\lambda}}{1-\gamma}=\lambda y(x+iy)^{\lambda-1} \tag{1.4}$$

Таким образом, общее решение системы уравнений (1.1) представляется в виде:

$$\begin{aligned} u &= A_1(x+iy)^{\lambda}+A_2 y(x+iy)^{\lambda-1}+A_3(x-iy)^{\lambda}+A_4 y(x-iy)^{\lambda-1} \\ \mathrm{v} &= B_1(x+iy)^{\lambda}+B_2 y(x+iy)^{\lambda-1}+B_3(x-iy)^{\lambda}+B_4 y(x-iy)^{\lambda-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в систему (1.1) определяет связь между произвольными постоянными A_i и B_i

$$B_1=iA_1-\frac{k}{\lambda}A_2,\ B_2=iA_2,\ B_3=-\left(iA_3+\frac{k}{\lambda}A_4\right),\ B_4=-iA_4 \tag{1.6}$$

Если ввести полярную систему координат

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r<\infty \tag{1.7}$$

то общее решение (1.5) с учетом (1.6) приведется к виду

$$u=r^{\lambda}\left[A_1e^{\lambda\theta}+A_2e^{i(\lambda-1)\theta}\sin\theta+A_3e^{-i\lambda\theta}+A_4e^{-(\lambda-1)\theta}\sin\theta\right] \tag{1.8}$$

$$\mathrm{v}=r^{\lambda}\left[\left(A_1-\frac{k}{\lambda}A_2\right)e^{i\lambda\theta}+iA_2e^{i(\lambda-1)\theta}\sin\theta-\left(iA_3+\frac{k}{\lambda}A_4\right)e^{-\lambda\theta}-iA_4e^{-i(\lambda-1)\theta}\sin\theta\right]$$

2.Рассмотрим частные задачи. Пусть обе грани клина жестко закреплены

$$u=\mathrm{v}=0 \text{ при } \theta=0,\ \varphi \tag{2.1}$$

Непосредственная подстановка (1.8) в (2.1) приводит к известному условию существования нетривиального решения [4]

$$k\sin\lambda\varphi\pm\lambda\sin\varphi=0 \tag{2.2}$$

определяющему показатель особенности λ.

В случае, когда грань клина $\theta=\varphi$ закреплена, а грань $\theta=0$ свободно скользит, граничные условия имеют вид

$$u_{\theta}=0,\ \sigma_{r\theta}=0 \text{ при } \theta=0,\quad u=\mathrm{v}=0 \text{ при } \theta=\varphi \tag{2.3}$$

Имея в виду известные формулы связи между полярной и прямоугольной системой координат [5]

$$\begin{aligned} &u_r=u\cos\theta+\mathrm{v}\sin\theta,\ u_{\theta}=-u\sin\theta+\mathrm{v}\cos\theta \\ &\sigma_{rr}=\sigma_{11}\cos^2\theta+\sigma_{22}\sin^2\theta+2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ &\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{11}\sin^2\theta+\sigma_{22}\cos^2\theta-2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ &\sigma_{r\theta}=(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta+\sigma_{22}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{aligned} \tag{2.4}$$

легко показать, что граничные условия (2.3) эквивалентны следующим условиям:

$$\mathrm{v}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ при } \theta=0,\quad u=\mathrm{v}=0 \text{ при } \theta=\varphi \tag{2.5}$$

Требование, чтобы решение (1.8) удовлетворяло граничным условиям (2.5), быстро приводит к установлению известного уравнения [4], определяющего собственные значения задачи

$$k \sin 2\lambda\varphi - \lambda \sin 2\varphi = 0 \qquad (2.6)$$

Наконец, рассматривается случай, когда грань клина $\theta = \varphi$ жестко закреплена, а на грани $\theta = 0$ имеют место условия Навье (антискользяший контакт)

$$u_r = 0, \; \sigma_{\theta\theta} = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad u = \mathrm{v} = 0 \text{ при } \theta = \varphi \qquad (2.7)$$

Несмотря на то,что условия Навье широко используются для других задач теории упругости, в частности, в теории изгиба пластин, задача с условиями Навье для клина ранее не исследовалась (по известной нам литературе). Она не приводится также в упомянутой итоговой статье [3].

Согласно (2.4), легко показать, что граничные условия (2.7) эквивалентны условиям:

$$u = 0, \; \partial \mathrm{v} / \partial y = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad u = \mathrm{v} = 0 \text{ при } \theta = \varphi \qquad (2.8)$$

Выражение для $\partial \mathrm{v} / \partial y$ в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = -r^{\lambda-1} \left\{ \begin{array}{l} \lambda A_1 e^{i(\lambda-1)\theta} + \left[i(k-1)e^{i(\lambda-1)\theta} + (\lambda-1)e^{i(\lambda-2)\theta} \sin\theta\right] A_2 + \\ + \lambda A_3 e^{-i(\lambda-1)\theta} - \left[i(k-1)e^{-i(\lambda-1)\theta} - (\lambda-1)e^{-i(\lambda-2)\theta} \sin\theta\right] A_4 \end{array} \right\} \qquad (2.9)$$

С учетом (2.9) из условий (2.8) при $\theta = 0$ получается

$$A_3 = -A_1, \; A_4 = A_2 \qquad (2.10)$$

Использование (2.10) в граничных условиях (2.8) при $\theta = \varphi$ приводит к следуюшей системе однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A_1, A_2:

$$\begin{gathered} iA_1 \sin \lambda\theta + A_2 \sin\theta \cos(\lambda-1)\theta = 0 \\ iA_1 \cos \lambda\theta - A_2 \left[k\lambda^{-1} \cos\lambda\theta + \sin\theta \sin(\lambda-1)\theta\right] = 0 \end{gathered} \qquad (2.11)$$

Приравнивание нулю детерминанта системы (2.11) приводит к уравнению, определяюшему собственное значение λ

$$k \sin 2\lambda\varphi + \lambda \sin 2\varphi = 0 \qquad (2.12)$$

3.Как было указано выше, решение вида (1.2) не дает возможности исследования логарифмической особенности. Многочисленные случаи логарифмической особенности в задаче клина приведены в [3].

Нетрудно проверить, что решения с логарифмической особенностью вида

$$u = A(x \pm iy) \ln(x \pm iy), \quad \mathrm{v} = B(x \pm iy) \ln(x \pm iy) \qquad (3.1)$$

также удовлетворяют системе уравнений (1.1). При этом, соответствующее линейно-независимое решение находится предельным переходом, аналогичным (1.4), и имеет вид

$$u = Cy\left[\ln(x \pm iy) + 1\right], \; \mathrm{v} = Dy\left[\ln(x \pm iy) + 1\right] \qquad (3.2)$$

Таким образом, общее решение с логарифмической особенностью запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} u = A_1 (x+iy) \ln(x+iy) + A_2 y\left[\ln(x+iy) + 1\right] + \\ + A_3 (x-iy) \ln(x-iy) + A_4 y\left[\ln(x-iy) + 1\right] \\ \mathrm{v} = B_1 (x+iy) \ln(x+iy) + B_2 y\left[\ln(x+iy) + 1\right] + \\ + B_3 (x-iy) \ln(x-iy) + B_4 y\left[\ln(x-iy) + 1\right] \end{gathered} \qquad (3.3)$$

Требование, чтобы решение (3.3) удовлетворяло системе (1.1), устанавливает следующие связи между постоянными A_i и B_i:

$$B_1 = iA_1 - kA_2,\ \ B_2 = iA_2,\ \ B_3 = -(iA_3 + kA_4),\ \ B_4 = -iA_4 \tag{3.4}$$

Решение (3.3) записывается в полярной системе координат. Рассматривается задача с граничными условиями (2.1), когда обе грани клина закреплены. Из удовлетворения условиям при $\theta = 0$ получается

$$2iA_1 = k(A_2 + A_4),\ \ 2iA_3 = -k(A_2 + A_4) \tag{3.5}$$

Требование, чтобы решение (3.3) (в полярной системе координат) удовлетворяло условиям (2.1) при $\theta = \varphi$, приводит к следующим равенствам:

$$\begin{gathered}[(k+1)\sin\varphi\ln r + \sin\varphi + k\varphi\cos\varphi](A_2 + A_4) + i\varphi\sin\varphi(A_2 - A_4) = 0 \\ [(k-1)\sin\varphi\ln r - \sin\varphi + \varphi\cos\varphi](A_2 - A_4) - i\varphi\sin\varphi(A_2 + A_4) = 0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что логарифмическая особенность возможна при условиях

$$k = 1,\ \ \varphi\cos\varphi - \sin\varphi = 0,\ \ \sin\varphi = 0 \tag{3.7}$$

Однако последние два условия противоречат друг другу. Следовательно, логарифмическая особенность не имеет места. В [3] другим методом получаются только первые два условия из (3.7) и этим утверждается наличие логарифмической особенности для клина с закрепленными гранями.

Аналогичным образом устанавливается невозможность появления логарифмической особенности для клина с граничными условиями (2.3) и (2.7).

Заключение. Показано, что решение в прямоугольной системе координат удобнее применять для задачи клина, когда хотя бы одна из граней клина закреплена. Получено уравнение, определяющее собственные значения для клина с условиями Навье на одной грани и закреплением на другой. Предложен метод исследования возможности логарифмической особенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексанян Р.К. Об одном классе решений плоской задачи теории упругости анизотропного тела // ДАН Арм.ССР. 1975. Т. 61. №4. С.219-224.
2. Алексанян Р.К. Некоторые задачи упругого равновесия и термоупругой устойчивости составных изотропных и анизотропных тел с нерегулярными границами. // Докт. диссертация. Ереван, 1997. 320с.
3. Sinclair G.B. Logarithmic Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // ASME J. of Appl. Mechanics. 1999. Vol.66. №2,P.556-560、
4. Williams M.J. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension //ASME Journal of Appl. Mech. 1956. Vol. 19 P. 526-528.
5. Лехницкий С.Р. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.05.2000