ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика
УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ НЕПОЛНЫХ СОСТАВНЫХ КРУГОВЫХ КОНУСОВ

Баблоян А.А., Макарян В.С., Аванян М.В.

Ա. Հ. Բաբլոյան, Վ.Ս. Մակարյան, Մ.Վ. Ավանյան

Պոտենցիալի հիմնական եզրային խնդիրները ոչ լրիվ բաղադրյալ կոների համար
Ստացված են Դիրիխլեի և Նեյմանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները լրիվ և ոչ լրիվ բաղադրյալ վերջավոր շրջանային կոների համար, երբ տարբեր նյութերն իրարից բաժանված են կոնական մակերևույթով կամ կիսահարթությամբ: Ուսումնասիրված է հարմոնիկ ֆունկցիաների վարքը ոչ լրիվ բաղադրյալ կոնի գագաթի շրջակայքում:

A.H. Babloyan, V. S. Makaryan, M. V. Avanyan

Main problems of a potential theory for partial composite circular cones

Получены точные решения задач Дирихле и Неймана для круговых составных полных или неполных конусов конечных длин, когда поверхность раздела различных материалов – коническая или полуплоскость. Исследуется поведение гармонических функций в окрестности вершин полных или неполных составных конусов.

В работе приводятся точные решения некоторых основных задач теории потенциала для области, ограниченной конической и сферической поверхностями, а также двумя полуплоскостями, проходящими через ось конуса. Рассматриваемое тело состоит из двух различных материалов с различными физическими характеристиками α_1 и α_2. Поверхность раздела различных материалов либо полуплоскости, либо же коническая поверхность. Основная цель работы – изучение поведения гармонических функций в окрестности вершины неполных составных конусов в зависимости от свойств материалов, типа граничных условий и геометрических параметров.

Аналогичные вопросы для однородных конусов исследовались в работах [1-5].

1. Поверхность раздела материалов коническая

Пусть потребуется решить трехмерную задачу Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

$$u(\rho,\theta,\varphi)\,|_S=u_0(\rho,\theta,\varphi)\quad\left(0\le\rho\le R,0\le\theta\le\theta_2,0\le\varphi\le\varphi_0\right)\tag{1.1}$$

когда на конической поверхности $\theta=\theta_1$ раздела различных материалов соблюдаются условия сопряжения

$$u(\rho,\theta_1-0,\varphi)=u(\rho,\theta_1+0,\varphi),\quad \alpha_1\frac{\partial u(\rho,\theta_1-0,\varphi)}{\partial\theta}=\alpha_2\frac{\partial u(\rho,\theta_1+0,\varphi)}{\partial\theta}\tag{1.2}$$

где (ρ, θ, φ) — сферические координаты, причем $0 < \theta_1 < \theta_2$.

Сначала приведем решение следующей задачи Штурма-Лиувилля с разрывом:

$$\left[\sin\theta\,\Phi'\right]' + \left[\nu(\nu+1) - \mu^2 \sin^{-2}\theta\right]\Phi \sin\theta = 0, \qquad (0 \le \theta \le \theta_2) \tag{1.3}$$

$$|\Phi(0)| < \infty, \quad \Phi(\theta_2) = 0, \quad \Phi(\theta_1 - 0) = \Phi(\theta_1 + 0), \quad \alpha_1 \Phi'(\theta_1 - 0) = \alpha_2 \Phi'(\theta_1 + 0)$$

где μ_p — заданные числа $(\mu_p = p\pi/\varphi_0)$.

Собственные числа $\nu_{kp} > 0$ задачи (1.3) будем определять из трансцендентного уравнения

$$\Phi_{kp}(\theta_2) = 0 \tag{1.4}$$

Собственные функции задачи (1.3) будут

$$\Phi_{kp}(\theta) = \begin{cases} y_1(\theta), & (0 \le \theta \le \theta_1) \\ y_1(\theta) + \dfrac{(\alpha_0 - 1) y_1'(\theta_1)}{y_0'(\theta_1)} y_0(\theta), & (\theta_1 \le \theta \le \theta_2) \end{cases} \tag{1.5}$$

где использованы обозначения

$$y_1(\theta) = P^{-\mu_p}_{\nu_{kp}}(\cos\theta), \quad y_2(\theta) = Q^{-\mu_p}_{\nu_{kp}}(\cos\theta), \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \mu_p = \frac{p\pi}{\varphi_0}$$

$$y_0(\theta) = y_1(\theta) y_2(\theta_1) - y_1(\theta_1) y_2(\theta) \tag{1.6}$$

Здесь $P^{\mu}_{\nu}(x)$, $Q^{\mu}_{\nu}(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

$$y_0'(\theta_1) = \frac{C_{kp}}{\sin\theta_1}, \quad C_{kp} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{(\nu_{kp} - \mu_p + 1)}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_{kp} - \mu_p}{2} + 1\right)}{2^{2\mu_p}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu_{kp} + \mu_p + 1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_{kp} + \mu_p}{2} + 1\right)} \tag{1.7}$$

Система функций $\{\Phi_{kp}(\theta)\}$ ортогональна с кусочно-постоянным весом $G_0(\theta)$

$$\int_0^{\theta_2} \Phi_{kp}(\theta) \Phi_{np}(\theta) G_0(\theta) \sin\theta \, d\theta = \delta_{kn}\, \omega_{kp} \tag{1.8}$$

где δ_{kn} — символ Кронекера,

$$\omega_{kp} = \frac{\sin\theta_2}{2\nu_{kp} + 1}\left[\dot{\Phi}_{kp}(\theta_2)\Phi_{kp}'(\theta_2) - \Phi_{kp}(\theta_2)\dot{\Phi}_{kp}'(\theta_2)\right]$$

$$G_0(\theta) = \begin{cases} \alpha_0, & (0 \le \theta < \theta_1) \\ 1, & (\theta_1 < \theta \le \theta_2) \end{cases}, \quad \dot{\Phi}(\theta) = \frac{d\Phi(\theta)}{d\nu}, \quad \Phi'(\theta) = \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} \tag{1.9}$$

Решение задачи Дирихле (1.1)- (1.2) ищем в виде двойного ряда Фурье:

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{k,p=1}^{\infty}\frac{2}{\varphi_0\,\omega_{kp}}X_{kp}(\rho)\,\Phi_{kp}(\theta)\sin\mu_p\varphi \tag{1.10}$$

обращение которого будет

$$X_{kp}(\rho)=\int_0^{\theta_2}\int_0^{\varphi_0}G_0(\theta)u(\rho,\theta,\varphi)\Phi_{kp}(\theta)\sin\theta\sin\mu_p\varphi\,d\theta\,d\varphi \tag{1.11}$$

Умножим обе части уравнения (1.1) на $G_0(\theta)\Phi_{kp}(\theta)\sin\theta\sin\mu_p\varphi$ и проинтегрируем по области $(0\le\theta\le\theta_2, 0\le\varphi\le\varphi_0)$. Пользуясь очевидными преобразованиями, для определения функций $X_{kp}(\rho)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left[\rho^2 X_{kp}'(\rho)\right]'-\nu_{kp}(\nu_{kp}+1)X_{kp}(\rho)=f_{kp}(\rho),\ (0\le\rho\le R) \tag{1.12}$$

$$\left|X_{kp}(0)\right|<\infty,\ X_{kp}(R)=A_{kp} \tag{1.13}$$

где

$$f_{kp}(\rho)=\sin\theta_2\frac{\partial\Phi_{kp}(\theta_2)}{\partial\theta_2}\int_0^{\varphi_0}u(\rho,\theta_2,\varphi)\sin\mu_p\varphi\,d\varphi+$$

$$+\mu_p\int_0^{\theta_2}\left[u(\rho,\theta,0)-(-1)^p u(\rho,\theta,\varphi_0)\right]\frac{\Phi_{kp}(\theta)G_0(\theta)}{\sin\theta}d\theta$$

$$A_{kp}=\int_0^{\theta_2}\int_0^{\varphi_0}G_0(\theta)u(R,\theta,\varphi)\Phi_{kp}(\theta)\sin\theta\sin\mu_p\varphi\,d\theta\,d\varphi \tag{1.14}$$

В силу граничного условия (1.1) величины $f_{kp}(\rho)$ и A_{kp} можно считать известными.

Решение уравнения (1.13), полученное методом вариации произвольных постоянных и дальнейшим предельным переходом, имеет вид

$$X_{kp}(\rho)=A_{kp}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}-\int_0^R K(x,\rho)\frac{f_{kp}(x)\,dx}{(2\nu_{kp}+1)R} \tag{1.15}$$

$$K_{kp}(\rho)=\begin{cases}\left(\dfrac{x}{R}\right)^{\nu_{kp}}\left[\left(\dfrac{R}{\rho}\right)^{\nu_{kp}+1}-\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}\right], & (x\le\rho)\\[2ex] \left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}\left[\left(\dfrac{R}{x}\right)^{\nu_{kp}+1}-\left(\dfrac{x}{R}\right)^{\nu_{kp}}\right], & (x\ge\rho)\end{cases}$$

Подставляя найденные функции $X_{kp}(\rho)$ из (1.15) в (1.10), получим окончательное решение задачи Дирихле (1.1)-(1.2). При этом ряд (1.10) будет сходиться абсолютно и равномерно со своими первыми производными в замкнутой области, если граничная функция $u(\rho,\theta,\varphi)$ удовлетворяет условиям: а) непрерывна; б) имеет непрерывные первые производные везде, кроме точек окружности $(\rho=R,\theta=\theta_1,0\le\varphi\le\varphi_0)$; в) в точках этой окружности первая производная функции $u_0(\rho,\theta,\varphi)$ по θ имеет разрыв типа (1.2). Короче, функции $u_0(\rho,\theta,\varphi)$ и $G_0(\theta)\dfrac{\partial u_0}{\partial\theta}$ должны быть непрерывными.

В частном случае, когда функция $f_{kp}(\rho)$ имеет вид

$$f_{kp}(\rho)=B_{kp}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}, \qquad \left(\alpha+\nu_{11}>-1, \qquad \alpha\neq\nu_{kp}\right) \tag{1.16}$$

для $X_{kp}(\rho)$ из (1.15) получим следующее выражение:

$$X_{kp}(\rho)=A_{kp}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}+\frac{B_{kp}}{(\alpha-\nu_{kp})(\nu_{kp}+\alpha+1)}\cdot\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}\right] \tag{1.17}$$

В том случае, когда число α совпадает с одним из корней ν_{kp} уравнения (1.7), выражение для $X_{kp}(\rho)$ получается из (1.17) путем предельного перехода, когда $\alpha\to\nu_{kp}$

$$X_{kp}(\rho)=A_{kp}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}+\frac{B_{kp}}{2\nu_{kp}+1}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}\ln\left(\frac{\rho}{R}\right) \tag{1.18}$$

Из полученного окончательного решения (1.10), (1.15)- (1.18) следует, что асимптотика гармонической функции в малой окрестности вершины составного, неполного кругового конуса, при $\rho<<R$, будет иметь вид

$$\text{а) } u(\rho,\theta,\varphi)\approx\frac{2\left(A_{11}+\widetilde{B}_{11}\right)}{\varphi_0\,\omega_{11}}\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{11}}\cdot\Phi_{11}(\theta)\sin\mu_1\varphi,\ (\alpha>\nu_{11})$$

$$\text{б) } u(\rho,\theta,\varphi)\approx-\widetilde{B}_{11}\Phi_{11}(\theta)\sin\mu_1\varphi\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha},\ (\alpha<\nu_{11}) \tag{1.19}$$

$$\text{в) } u(\rho,\theta,\varphi)\approx\left[A_{11}-\frac{B_{11}}{2\nu_{11}+1}\ln\frac{\rho}{R}\right]\cdot\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{11}}\cdot\Phi_{11}(\theta)\sin\mu_1\varphi,\ (\alpha=\nu_{11})$$

где

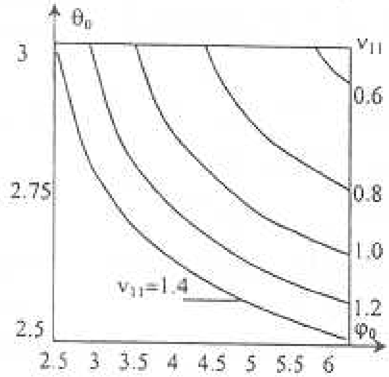
$$\widetilde{B}_{11}=\frac{B_{11}}{(\alpha-\nu_{11})(\nu_{11}+\alpha+1)}$$

Путем дифференцирования из (1.19) можно получить асимптотические формулы для производных гармонической функции.

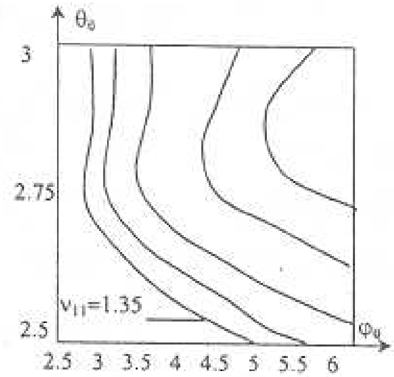
На фиг. 1 приведены графики функции $\nu_{11}(\varphi_0,\theta_0)=C$, обусловленной трансцендентным уравнением (1.7) (задача Дирихле) для различных значений $C=1.4;1.2;1;0.8;0.6$.

Аналогичным образом можно решать задачу Неймана для рассматриваемого составного тела. Здесь отметим только, что в случае задачи Неймана собственные функции $\Phi_{kp}(\theta)$ выражаются формулами (1.4) – (1.5), а собственные числа будут определяться из трансцендентного уравнения

$$\Phi_{kp}'(\theta_2)=0 \tag{1.7'}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для сравнения, на фиг. 2 приведены графики функции $\nu_{11}(\varphi_0,\theta_0)=C_1$ для задачи Неймана (уравнение (1.7′)) для следующих значений постоянного $C_1=1.35;1.2;1;0.8;0.6$.

2. Поверхность раздела материалов–полуплоскость

Рассмотрим задачу Дирихле (1.1) для составного конуса $(0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\theta_0, 0\le\varphi\le\varphi_0)$ при граничных условиях первого рода $u(\rho,\theta,\varphi)|_s=u_0(\rho,\theta,\varphi)$, когда на полуплоскости
$(0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\theta_0, \varphi=\varphi_1)$ заданы условия сопряжения двух материалов

$$u(\rho,\theta,\varphi_1-0)=u(\rho,\theta,\varphi_1+0),\quad \alpha_1\frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi_1-0)}{\partial\varphi}=\alpha_2\frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi_1+0)}{\partial\varphi} \tag{2.1}$$

Решение гармонического уравнения (1.1) ищем в виде ряда Фурье

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_{kp}(\rho)}{\omega_{kp}}P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\Phi_p(\varphi) \tag{2.2}$$

$$\omega_{kp}=\frac{\sin\theta_0}{2\nu_{kp}+1}\left[\dot{P}_{kp}^{-\mu_p}(x_0)\frac{d\,P_{kp}^{-\mu_p}(x_0)}{d\theta_0}-P_{kp}^{-\mu_p}(x_0)\frac{d\,\dot{P}_{kp}^{-\mu_p}(x_0)}{d\theta_0}\right],\quad x_0=\cos\theta_0$$

Для задачи Дирихле ν_{kp} являются положительными корнями уравнения $P_\nu^{-\mu_p}(\cos\theta_0)=0$ при заданных μ_p. Функции $\Phi_p(\varphi)$, $(p=1,2,\ldots)$ являются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля с разрывом

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad \Phi(0)=\Phi(\varphi_0)=0$$

$$\Phi(\varphi_1-0)=\Phi(\varphi_1+0),\quad \alpha_1\frac{d\Phi(\varphi_1-0)}{d\varphi}=\alpha_2\frac{d\Phi(\varphi_1+0)}{d\varphi} \tag{2.3}$$

Нормированные собственные функции задачи (2.3) при условии $\sin\mu_p\varphi_1=\sin\mu_p\varphi_2\ne0$ имеют вид

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi)=\begin{cases}\sin\mu_p\varphi_2\sin\mu_p\varphi, & (0\le\varphi\le\varphi_1)\\ \sin\mu_p\varphi_1\sin\mu_p(\varphi_0-\varphi), & (\varphi_1\le\varphi\le\varphi_0)\end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$2\varepsilon_p^2=\varphi_1\alpha_0\sin^2\mu_p\varphi_2+\varphi_2\sin^2\mu_p\varphi_1,\ \alpha_0=\alpha_1/\alpha_2,\ \varphi_1+\varphi_2=\varphi_0 \tag{2.5}$$

а собственные числа μ_p определяются из уравнения

$$\sin\mu_p\varphi_1\cos\mu_p\varphi_2+\alpha_0\cos\mu_p\varphi_1\sin\mu_p\varphi_2=0,\ \mu_p>0 \tag{2.6}$$

Нетрудно проверить, что уравнения (2.6) и $P_\nu^{-\mu_p}(\cos\theta_0)=0$ имеют простые действительные корни.

Система функций $\{\Phi_p(\varphi)\}$ ортогональна на отрезке $[0,\varphi_0]$ с кусочно-постоянным весом $G_0(\varphi)$,

$$\int_0^{\varphi_0}G_0(\varphi)\Phi_k(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi=\delta_{k,p},\quad G_0(\varphi)=\begin{cases}\alpha_0, & (0\le\varphi<\varphi_1)\\ 1, & (\varphi_1<\varphi\le\varphi_0)\end{cases} \tag{2.7}$$

В случае $\cos\mu_p\varphi_1=\cos\mu_p\varphi_2\ne 0$ функции можно представить в виде

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi)=\begin{cases}\alpha_0^{-1}\cos\mu_p\varphi_2\sin\mu_p\varphi, & (0\le\varphi\le\varphi_1)\\ \cos\mu_p\varphi_1\sin\mu_p(\varphi_0-\varphi), & (\varphi_1\le\varphi\le\varphi_0)\end{cases}$$

$$2\varepsilon_p^2=\varphi_1\alpha_0^{-1}\cos^2\mu_p\varphi_2+\varphi_2\cos^2\mu_p\varphi_1 \tag{2.8}$$

В частном случае, когда $\varphi_1=\varphi_2$, функции $\Phi_p(\varphi)$ определяются простыми формулами

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi)=\begin{cases}G_0^{-1}\sin\mu_p\varphi,\ \mu_p\varphi_0=2\pi p, & 2\varepsilon_p^2=\varphi_1\alpha_0^{-1}+\varphi_2;\\ \sin\mu_p\varphi, \quad \mu_p\varphi_0=(2p-1)\pi, & 2\varepsilon_p^2=\varphi_1\alpha_0+\varphi_2;\end{cases} \tag{2.9}$$

Обращение разложения (2.2), в силу (2.7) будет

$$X_{kp}(\rho)=\int_0^{\theta_0}\int_0^{\varphi_0}G_0(\varphi)u(\rho,\theta,\varphi)\Phi_p(\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{2.10}$$

Применяя метод Гринберга к уравнению (1.1), для определения неизвестных функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение (1.13), где

$$A_{kp}=\int_0^{\theta_0}\int_0^{\varphi_0}G_0(\varphi)u(R,\theta,\varphi)\Phi_p(\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$f_{kp}(\rho)=\sin\theta_0\frac{dP_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)}{d\theta_0}\int_0^{\varphi_0}G_0(\varphi)u(\rho,\theta_0,\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi+$$

$$+\int_0^{\theta_0}\left[u(\rho,\theta,\varphi_0)\Phi_p'(\varphi_0)-\alpha_0u(\rho,\theta,0)\Phi_p'(0)\right]P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\frac{d\theta}{\sin\theta} \tag{2.11}$$

Функции $X_{kp}(\rho)$ будем определять по формулам (1.15) при обозначениях (2.11), а окончательное решение задачи Дирихле дается формулами (2.2), (1.15) и (2.11).

3. Задача Дирихле для составного полного кругового конуса конечной длины

Пусть круговой полный конус состоит из двух различных материалов (с физическими параметрами α_1 и α_2), которые разделены друг от друга двумя полуплоскостями $(\varphi = \pm\varphi_1, \quad 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \theta_0)$. Потребуется решать неоднородное уравнение Лапласа (1.1) для составного конуса $(0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \theta_0, -\pi \le \varphi \le \pi)$ конечной длины при граничных условиях первого рода

$$u(\rho, \theta_0, \varphi) = u_1(\rho, \varphi), \; u(R, \theta, \varphi) = u_2(\theta, \varphi) \tag{3.1}$$

Для простоты рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1.1) и функции (3.1) четные относительно полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. При этом задачу будем решать только для области $(0 \le \varphi \le \pi)$, удовлетворяя условиям симметрии

$$\frac{\partial u(\rho, \theta, 0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial u(\rho, \theta, \pi)}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.2}$$

и условиям сопряжений двух различных материалов

$$u(\rho, \theta, \varphi_1 - 0) = u(\rho, \theta, \varphi_1 + 0), \quad \alpha_1 \frac{\partial u(\rho, \theta, \varphi_1 - 0)}{\partial \varphi} = \alpha_2 \frac{\partial u(\rho, \theta, \varphi_1 + 0)}{\partial \varphi} \tag{3.3}$$

Решение задачи Дирихле для полного составного конуса ищем в виде двойного ряда Фурье

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{kp}(\rho)}{\omega_{kp}} P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta) \Phi_p(\varphi) \tag{3.4}$$

где μ_p и ν_{kp} являются неотрицательными корнями уравнений $(\varphi_1 + \varphi_2 = \pi)$

$$\alpha_0 \sin\mu_p\varphi_1 \cos\mu_p\varphi_2 + \sin\mu_p\varphi_2 \cos\mu_p\varphi_1 = 0, \; P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0) = 0 \tag{3.5}$$

а функции $\Phi_p(\varphi)$ имеют вид (при $\cos\mu_p\varphi_k \ne 0$, $k = 1,2$)

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos\mu_p\varphi_1 \cos\mu_p\varphi, & (0 \le \varphi \le \varphi_1) \\ \cos\mu_p\varphi_2 \cos\mu_p(\pi - \varphi), & (\varphi_1 \le \varphi \le \pi) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$2\varepsilon_p^2 = \alpha_1\varphi_1 \cos^2\mu_p\varphi_2 + \alpha_2\varphi_2 \cos^2\mu_p\varphi_1 \quad (p = 0,1,2,\ldots)$$

Числа ω_{kp} определяются по формуле (2.2') с учетом (3.5).

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0.5\pi$, для функций $\Phi_p(\varphi)$ будем иметь

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos\mu_p\varphi, & (\mu_p = 2p) \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}\, \rho_0^{-1}(\varphi) \cos\mu_p\varphi, & (\mu_p = 2p) \end{cases}, \quad 4\varepsilon_p^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\pi \tag{3.7}$$

Функции $\Phi_p(\varphi)$ ортогональны на интервале $[0,\pi]$ с весом $\rho_0(\varphi)$

$$\int_0^\pi \rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)\Phi_k(\varphi)d\varphi = \delta_{kp}, \quad \rho_0(\varphi) = \begin{cases} \alpha_1, \ (0 \le \varphi < \varphi_1) \\ \alpha_2, \ (\varphi_1 < \varphi \le \pi) \end{cases} \tag{3.8}$$

Аналогичным образом для определения функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение (1.13), где

$$f_{kp}(\rho) = g_{kp}(\rho) + \sin\theta_0 \frac{dP_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)}{d\theta} \int_0^\pi u_1(\rho,\varphi)\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi$$

$$g_{kp}(\rho) = \int_0^{\theta_0}\int_0^\pi G(\rho,\theta,\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)\sin\theta\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\theta\, d\varphi$$

$$A_{kp} = \int_0^{\theta_2}\int_0^{\varphi_0} u_2(\theta,\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\,\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\theta\, d\varphi \tag{3.9}$$

При этом решение уравнения (1.13) при обозначениях (3.9) дается формулой (1.15). Окончательное решение задачи Дирихле определяется формулами (1.15) и (3.9).

После нахождения μ_p из (2.6) или из первого уравнения (3.5), корень уравнения $P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta) = 0$ можно определять следующими приближенными формулами [6,7,8]:

а) $$\nu_{kp} + 1/2 = \frac{j_\mu}{2\sin(\theta/2)}\left[1 - \frac{1}{6}\left(1-(4\mu-1)\,j_\mu^{-2}\right)\sin^2(\theta/2) + 0\left(\sin^4(\theta/2)\right)\right]$$

где $\theta \approx 0$, а j_μ – любой не равный нулю корень уравнения $J_\mu(z) = 0$ $(\mu \ge 0)$.

б) Если θ близко к π, то

$$\nu \approx \mu + k + \frac{\Gamma(2\mu+k+1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)} \cdot \left(\frac{\pi-\theta}{3}\right)^{2\mu}, \quad (\mu > 0;\ k = 0,1,2,3\ldots)$$

$$\nu \approx k + \left[2\ln\left(\frac{2}{\pi-\theta}\right)\right]^{-1} \qquad (\mu = 0;\ k = 0,1,2,3\ldots)$$

в) Если $\theta = \pi/2$, то

$$\nu \approx \mu + 1 + 2k \qquad (\mu \ge 0;\ k = 0,1,2,3\ldots)$$

г) При $\theta \approx \pi/2$ имеет место

$$(\nu + 0.5)\theta \approx \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad (\mu \ge 0; \nu > 0;\ k = 0,1,2,3\ldots)$$

Приведенные формулы предусмотрены для нахождения положительных корней уравнения $P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta) = 0$. Известно, что числа ν и $-(\nu+1)$ одновременно являются корнями вышеприведенного уравнения. На этой основе можно определить все отрицательные корни

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками Math. Nachr, 1977, т. 76.
2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262с.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
4. Геворкян Г. З., Макарян В. С. Контактная задача для шарового сектора// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. №1. С. 51-60.
5. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 687 с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100с.
7. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln and Satze fur die spesielien Funktionen der math. Phisik. Springer — Verlag, Berlin, ... , 1948.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. 224 с.

Ереванский гос. университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
31.10.2000