ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Барсегян В.Р.

Վ.Ռ. Բարսեղյան
Ստոխաստիկ հակադարձ կապով գծային համակարգերի ղեկավարումը

Դիտարկվում է գծային օբյեկտի օպտիմալ ղեկավարման խնդիր այն ենթադրությամբ, որ հակադարձ կապում հաշվի են առնվում շարժման ճշգրտումների պահերին օբյեկտի վիճակի մասին ստացվող սխալով տեղեկությունները: Ստացված են գնահատական ցանկալի շարժումից իրական շարժման շեղման համար և պայման տրված ճշտությամբ ծարժումների մոտիկությունը երաշխավորող ճշգրտումների թվի համար:

V.R. Barseghyan
Optimal control of linear systems with stochastic feed-back

Рассматривается задача оптимального управления объектов в предположении, что в моменты коррекции движения информация о состоянии объекта поступает с ошибкой, которая учитывается в обратной связи. Построены оптимальное стохастическое управление и реальное движение. Получены оценка для отклонения реального движения от желаемого и условия для числа коррекции, гарантирующие близость движения на заданную величину

1. Пусть движение управляемого объекта описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t) \tag{1.1}$$

Предполагается, что $x(t)$ – n-мерный фазовый вектор, $A(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$-мерные матрицы, элементы которых измеримые ограниченные функции при $t_0 \le t \le T$ (t_0 и T – заданные моменты времени), $u(t)$ – r-мерный вектор управляющих воздействий, компоненты которого считаются измеримыми ограниченными функциями, $f(t)$ – n-мерный вектор внешних воздействий (быть может измеримой ограниченной функцией).

Заданы начальное и конечное значения фазового вектора

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

и функционал

$$æ[u] = \left[\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{r} u_i^2(t) \right) dt \right]^{1/2} \tag{1.2}$$

Решение задачи оптимального перевода системы (1.1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ при минимизации функционала $æ[u]$ (1.2) будет [1].

$$u^0(t) = B'(t)X'[T,t]Q^{-1}(T,t_0)\left[x(T) - X[T,t_0]x(t_0) - \int_{t_0}^{T} X[T,\tau]f(\tau)d\tau \right] \tag{1.3}$$

где Q — матрица с элементами α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{T} h_{ik}(T,\tau) h_{jk}(T,\tau) d\tau$$

h_{ij} — элементы матрицы $S'[\tau,T]B(\tau)$, $S[\tau,T]$ — фундаментальная матрица сопряженной системы однородной части (1.1), $X[T,\tau]$ — фундаментальная матрица однородной части (1.1). Здесь штрих означает транспонирование.

Оптимальную траекторию $x^0(t)$ системы (1.1) получим, интегрируя ее с учетом $u^0(t)$ (1.3) при начальном условии $x(t_0)$ и будем иметь

$$x^0(t) = X[t,t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X[t,\tau]\left[B(\tau)u^0(\tau) + f(\tau)\right]d\tau \tag{1.4}$$

Фазовую траекторию $x^0(t)$ (1.4) будем считать желаемой (поводырем) для обеспечения конечного условия. Однако, в практике реальное движение объекта, описываемого математической моделью (1.1) под воздействием программного управления $u^0(t)$ (1.3), будет отличаться от желаемого (1.4). Это отличие обусловлено различными внешними влияниями, действующими на систему. Следовательно, в конце процесса не будет выполнено конечное условие.

Поэтому, необходимо следить за реальным движением объекта и построить алгоритм (непротиворечащий условиям реализации), который по мере возможности уменьшило бы отличие реального движения от желаемого.

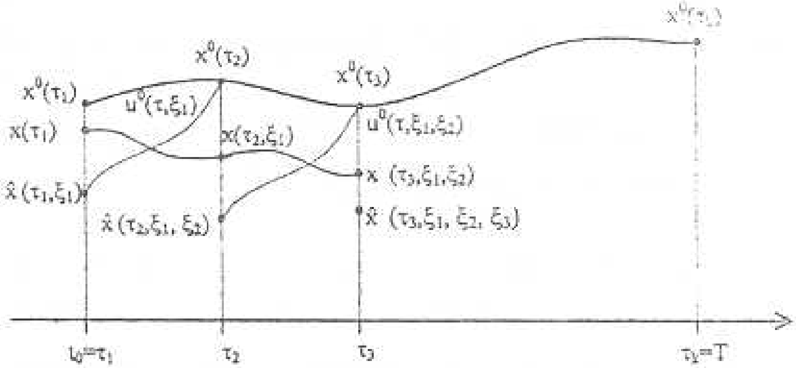
2. Предположим, что имеется возможность корректировать фазовую траекторию движения системы для прицеливания на построенный поводырь $x^0(t)$ (1.4). Поэтому пусть имеем разбиение промежутка времени $[t_0,T]$; $t_0 = \tau_1 < ... < \tau_k = T$ и имеется возможность с помощью измерительных устройств измерять значение фазового вектора. В зависимости от ограниченности физических возможностей измерительных устройств и различных внешних влияний результат измерения будет неточным [2,3].

Обозначим измеренное с некоторой ошибкой в момент времени τ_1 значение фазового вектора через $\hat{x}(\tau,\xi_1)$, где случайная величина ξ_1 распределена равномерно на полуинтервале $0 \le \xi_1 < 1$ [2]. Пусть $x(\tau_1)$ — реальное состояние системы в начальный момент времени τ_1 (фиг.1). Оптимальное управляющее воздействие, переводящее систему (1.1) из известного состояния $\hat{x}(\tau_1,\xi_1)$ в желаемое состояние $x^0(\tau_2)$ и минимизирующее функционал (1.2) на промежутке времени $[\tau_1,\tau_2]$, согласно (1.3) будет

$$u^0(\tau,\xi_1) = B'(\tau)X'[\tau_2,\tau]Q^{-1}(\tau_2,\tau_1)\times$$
$$\times\left[x^0(\tau_2) - X[\tau_2,\tau_1]\hat{x}(\tau_1,\xi_1) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} X[\tau_2,\tau]f(\tau)d\tau\right] \tag{2.1}$$

Следовательно, оптимальное стохастическое движение системы под воздействием управления $u^0(\tau,\xi_1)$, выходящего из состояния $\hat{x}(\tau_1,\xi_1)$, будет [4]

$$x^0(t,\xi_1)=X[t,\tau_1]\hat{x}(\tau_1,\xi_1)+\int_{\tau_1}^{t}X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1)+f(\tau)]d\tau \qquad (2.2)$$



Фиг.1

Так как в момент времени τ_1 реальным фазовым состоянием системы является $x(\tau_1)$, то реальное движение системы (1.1) под воздействием управления $u^0(\tau,\xi_1)$ (2.1), $\tau\in[\tau_1,\tau_2]$ необходимо считать выходящим из состояния $x(\tau_1)$ и будет

$$x(t,\xi_1)=X[t,\tau_1]x(\tau_1)+\int_{\tau_1}^{t}X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1)+f(\tau)]d\tau \qquad (2.3)$$

В момент времени τ_2, согласно (2.3), реальное фазовое состояние $x(\tau_2,\xi_1)$ не будет совпадать с состоянием $x^0(\tau_2,\xi_1)=x^0(\tau_2)$, определяемым (2.2).

Чтобы провести соответствующую корректировку отклонения траектории в момент времени τ_2, измеряя в этот момент с некоторой ошибкой фазовое состояние, получим значение $\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$, где случайная величина ξ_2 распределена равномерно на полуинтервале $0\le\xi_2<1$ и такая, что величины (ξ_1,ξ_2) в совокупности независимы.

Решая задачу оптимального управления системой (1.1) на промежутке времени $[\tau_2,\tau_3]$ при начальном $\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$, конечном $x^0(\tau_3)$ состояниях и функционале (1.2) будем иметь оптимальное управление $u^0(\tau,\xi_1,\xi_2)$, явный вид которого аналогичен выражению (2.1).

Оптимальное стохастическое движение под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,\xi_2)$, выходящего из состояния $\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$, будет

$$x^0(t,\xi_1,\xi_2) = X[t,\tau_2]\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2) + \int_{\tau_2}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,\xi_2) + f(\tau)]d\tau \quad (2.4)$$

Реальное движение системы (1.1) под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,\xi_2)$ выходит из состояния $x(\tau_2,\xi_1)$ ($x(\tau_2,\xi_1)$ получаем из (2.3), подставляя $t=\tau_2$) и будет

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = X[t,\tau_2]x(\tau_2,\xi_1) + \int_{\tau_2}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,\xi_2) + f(\tau)]d\tau \quad (2.5)$$

В момент времени τ_3, согласно (2.5), реальное состояние $x(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$ не будет совпадать с состоянием $x^0(\tau_2,\xi_1,\xi_2) = x^0(\tau_3)$, определяемым из (2.4).

Продолжая рассуждения и решая задачу оптимального управления системой (1.1) на промежутке времени $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ при начальном $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_i)$, конечном $x^0(\tau_{i+1})$ состояниях и функционале (1.2), будем иметь оптимальное управление $u^0(\tau,\xi_1,\ldots\xi_i)$.

Оптимальное стохастическое движение под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,\ldots\xi_i)$, выходящего из состояния $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots\xi_i)$, будет

$$x^0(t,\xi_1,\ldots,\xi_i) = X[t,\tau_i]\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_i) + \int_{\tau_i}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_i) + f(\tau)]d\tau \quad (2.6)$$

Реальное движение системы (1.1) под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,\ldots\xi_i)$ выходит из состояния $x^0(\tau_i,\xi_1,\ldots\xi_{i-1})$ и будет

$$x(t,\xi_1,\ldots,\xi_i) = X[t,\tau_i]x(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_{i-1}) + \int_{\tau_i}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_i) + f(\tau)]d\tau \quad (2.7)$$

Ясно, что в момент времени τ_{i+1} реальное состояние системы $x(\tau_{i+1},\xi_1,\ldots,\xi_i)$ и состояние $x^0(\tau_{i+1},\xi_1,\ldots,\xi_i)$ не совпадают. Здесь предполагается, что случайные величины $(\xi_1,\ldots,\xi_i)$ распределены равномерно на полуинтервале [0, 1) и в совокупности независимы.

Оценим расстояние реального состояния системы $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_i)$ от желаемого состояния $x^0(\tau_i)$. Для момента времени τ_2 имеем

$$\left\|x^0(\tau_2) - x(\tau_2,\xi_1)\right\| = \left\|X[\tau_2,\tau_1]\right\| \cdot \left\|\hat{x}(\tau_1,\xi_1) - x^0(\tau_1)\right\| \quad (2.8)$$

Предполагается, что $x(\tau_1) = x^0(\tau_1)$. Для момента времени τ_3 с учетом (2.8) получим [4]

$$\left\|x^0(\tau_3) - x(\tau_3, \xi_1, \xi_2)\right\| = \left\|X[\tau_3, \tau_2]\right\| \cdot \left\|\hat{x}(\tau_2, \xi_1, \xi_2) - x^0(\tau_2)\right\| +$$

$$+ \left\|X[\tau_3, \tau_1]\right\| \cdot \left\|\hat{x}(\tau_1, \xi_1) - x^0(\tau_1)\right\|$$

Продолжая процедуру оценивания расстояния, для конечного момента времени τ_k будем иметь

$$\left\|x^0(\tau_k) - x(\tau_k, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})\right\| = \sum_{i=2}^{k} \left\|X[\tau_k, \tau_{i-1}]\right\| \cdot \left\|\hat{x}(\tau_{i-1}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}) - x^0(\tau_{i-1})\right\|$$

Полученное выражение позволяет оценить математическое ожидание и дисперсию отклонения системы от поводыря.

3. В пункте 2 предполагалось, что в моменты корректировки τ_i каким-то образом (измерения, которые не всегда доступны) известно значение фазового состояния $\hat{x}(\tau_i, \xi_1, \dots, \xi_i)$. Задавая математическую модель через измерительное устройство поступающего реального (с ошибкой) сигнала и исследуя задачу наблюдения фазового вектора, можно определить функциональный вид измеренного значения $\hat{x}(\tau_i, \xi_1, \dots, \xi_i)$.

Пусть через измерительное устройство поступает реальный сигнал вида

$$Z(\tau) = G(\tau)x(\tau) + \Delta(\tau), \qquad \tau \in [t - \theta, t] \tag{3.1}$$

где $G(\tau) - (m \times n)$-мерная матрица, $\Delta(\tau) - m$-мерный вектор погрешности, θ — положительное число, учитывающее необходимую продолжительность запоминания поступающего сигнала. Исходя из физических условий процесса наблюдения, вытекает некоторая оценка погрешности по норме

$$\rho[\Delta(\tau)] \le \delta \tag{3.2}$$

где δ — положительная постоянная.

Известно, что оптимальная операция $\varphi^0[t, z(\tau)]$ [1], вычисляющая фазовый вектор (при каждом t по всевозможным реализациям $z(\tau)$ (3.1)) с наименьшей возможной ошибкой при заданной оценке погрешности $\Delta(\tau)$ (3.2), является линейной. Следовательно,

$$\varphi^0[t, z(\tau)] = \varphi^0[t, G(\tau)x(\tau)] + \varphi^0[\Delta(\tau)]$$

Поэтому, следуя вышеизложенному, в любой момент времени τ_i измеренное с некоторой ошибкой фазовое состояние как результат оптимального решения задачи наблюдения с реальным сигналом $z(\tau)$ при $\tau \in [\tau_i - \theta_i, \tau_i]$ представится в виде

$$\hat{x}(\tau_i, \xi_1, \dots, \xi_i) = x(\tau_i, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}) + \omega(\tau_i, \xi_i) \qquad (i = 1, \dots, k) \tag{3.3}$$

где $\omega(\tau,\xi)$ — функция ошибки измерения и является результатом действия оптимальной операции на погрешность $\Delta(\tau)$ реального сигнала $z(\tau)$ из (3.1).

Предполагается, что моменты времени τ_i и числа θ_i $(i=1,...,k)$ такие, что $\tau_i > \tau_{i-1} + \theta_i$. Следовательно, как и выше, определим оптимальное управление $u^0(\tau,\xi_1,...,\xi_i)$, переводящее систему (1.1) из состояния (3.3) в состояние $x^0(\tau_{i+1})$.

В конце процесса движения, при измеренных значениях фазового состояния (3.3), для расстояния реального состояния $x(\tau_k,\xi_1,...,\xi_{k-1})$ системы от желаемого состояния $x^0(\tau_k)$ будем иметь следующую оценку:

$$\left\|x^0(\tau_k) - x(\tau_k,\xi_1,...,\xi_{k-1})\right\| \le \left\|X[\tau_k,\tau_{k-1}]\right\| \cdot \left\|\omega[\tau_k,\xi_k]\right\| \quad (3.4)$$

Отметим, что из определения нормы линейной операции [1] вытекает

$$\sup_{\Delta}\left|\varphi[\Delta(\tau)]\right| = \delta\rho^*[\varphi] \quad (3.5)$$

при условии (3.2), где ρ^* — сопряженная норма.

Следовательно, учитывая $\varphi^0[\Delta(\tau)] = \omega(\tau,\xi)$ и (3.5), (3.4) запишется в виде

$$\left\|x^0(\tau_k) - x(\tau_k,\xi_1,...,\xi_{k-1})\right\| \le \left\|X[\tau_k,\tau_{k-1}]\right\| \cdot \delta \cdot \rho^*[\varphi] \quad (3.6)$$

Заметим, что измеренное состояние (3.3) в момент времени τ_i можно представить в виде

$$\hat{x}(\tau_i,\xi_1,...,\xi_i) = x(\tau_i,\xi_1,...,\xi_{i-1}) + \xi_i\sigma(\tau_i) \quad (i=1,...,k) \quad (3.7)$$

где $\sigma(\tau_i)$ — некоторый известный n-мерный вектор, значение которого обусловлено движением рассматриваемой системы, физическими и техническими возможностями измерительного устройства.

Для фундаментальной матрицы (1.1) имеем

$$\left\|X[\tau_k,\tau_{k-1}]\right\| \le \exp\left[\|A\|(\tau_k - \tau_{k-1})\right] \quad (3.8)$$

Пусть $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_k = \theta$. Чтобы норма расстояния реального состояния системы от желаемого была меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, из (3.6) с учетом (3.8) получим

$$0 < \theta < \frac{1}{\|A\|}\ln\frac{\varepsilon}{\delta\cdot\rho^*[\varphi]}$$

Из неравенства $\tau_i > \tau_1 + (i-1)\theta$, $(i=2,...,k)$ для числа коррекции движения $N = k-1$ имеем следующие условия:

$$N < \frac{T - t_0}{\theta} \text{ или } N < \|A\| \cdot (T - t_0)\left(\ln \frac{\varepsilon}{\delta\rho^*[\varphi]}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

Таким образом, если через измерительное устройство поступает сигнал (3.1), то измеренное (вычисленное) состояние будет иметь общий вид (3.3) (или, в частности, (3.7) и имеет место оценка (3.4) или (3.6)). И чтобы при матрице $A(t)$ обеспечить заданную близость (по норме) реального движения от желаемого, необходимое число коррекции движения должно удовлетворять условию (3.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Красовский Н.Н. Управления динамической системой. М.: Наука, 1985. 519с.
3. Габриелян М.С., Барсегян В.Р., Симонян Т.А. Об уклонении стохастической линейной системы при m целевых множествах //Уч.записки ЕГУ. 1996. № 1. С.10-16.
4. Барсегян В.Р. Оптимальное стохастическое управление сближением космических аппаратов // Изв.НАН и ГИУ Армении. Сер. техн. наук. 1999. № 1. С.94-100.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 30.05.2000