ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №2, 2001** Механика
УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЛУНОЧКИ С СИММЕТРИЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Арутюнян Л.А.

Լ.Ա. Հարությունյան
Ճաքեր պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության մեկ հարթ խնդրի լուծումը

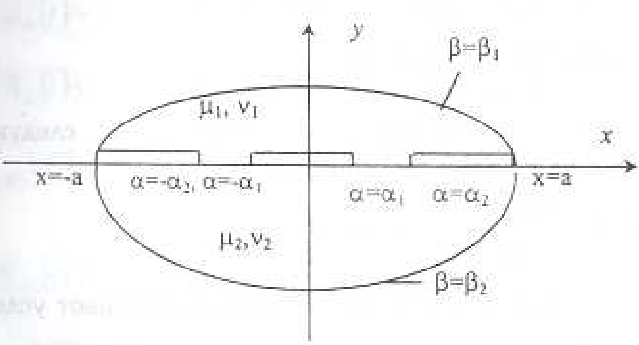
Երկբևեռ կոորդինատային համակարգի և Ֆուրյեի ինտեգրալի օգնությամբ, տրված է շրջանային աղեղներով սահմանափակված առաձգականության հարթ տեսության բաղադրյալ մարմնի մեկ խնդրի լուծումը, որը պարունակում է սիմետրիկ ճաքեր բաժանման մակերևույթի վրա:
Մասնավոր դեպքում, երբ բացակայում են ճաքերը կամ նյութերը միացված են կոնտակտային գծի երկարությամբ, ապա խնդրի լուծման համար ստացված է փակ լուծում:
Ցույց է տրված, որ եթե բաղադրյալ մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերը և նյութերի երկրաչափական չափերը նույնն են, ապա լարվածային վիճակը կախված չէ նյութերի հատկություններից:
Քննարկված է լարումների վարքը ճաքի և միացման մակերևույթի ծայրակետերում:

L.A. Haroutunyan
On one plane problem of elasticity theory inhomogeneous Moonshape body ith symmetrical cracks

В настоящей работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение плоской задачи теории упругости для двух областей, образованных пересечением дуг окружностей, имеющих симметричные трещины между материалами.

В работах (4-9) приведены решения задач для составных тел, имеющих на границе раздела материалов трещины. В этих работах рассмотрены слои, круговые кольца, дуги окружности и прямоугольники.

В данной работе рассматривается плоская контактная задача теории упругости для области, состоящей из двух внутренних луночных областей с различными упругими характеристиками. На контактной линии имеются две симметричные трещины, превращающие область в двухсвязную (фиг. 1).



Фиг. 1

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат $\alpha;\beta$, которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями [1-2]

$$xg(\alpha,\beta)=\operatorname{sh}\alpha,\ yg(\alpha,\beta)=\sin\beta,\ ag(\alpha,\beta)=\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta \tag{1}$$

где a — параметр биполярных координат.

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками μ_1,ν_1 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[0;\beta_1]$, а второй с упругими характеристиками μ_2,ν_2 — область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[\beta_2;0]$.

Функция напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)\,(m=1,2)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению в биполярной системе координат [1-3]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi_m)=0 \quad m=1,2 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений следующими формулами:

$$a\sigma_\alpha^{(m)}=\left[(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ch}\alpha\right](g\Phi_m)$$

$$a\sigma_\beta^{(m)}=\left[(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right](g\Phi_m)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(m)}=-(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi_m) \tag{3}$$

$$aU_m=\frac{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi_m}{\partial\beta}\right]$$

$$a\mathrm{V}_m=\frac{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta}-\frac{\partial\Psi_m}{\partial\alpha}\right] \qquad m=1,2$$

где $\Psi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ — бигармоническая функция, связанная с $\Phi_m(\alpha,\beta)\,(m=1,2)$ формулами

$$g\Psi_m(\alpha,\beta)=(1-\nu_m)\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)(g\Phi_m)\,d\alpha\,d\beta \tag{4}$$

Пусть трещина находится в промежутке

$$\alpha\in(-\infty,-\alpha_2)\cup(-\alpha_1,\alpha_1)\cup(\alpha_2;\infty) \text{ и } \beta=0$$

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1]:

$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha);\quad \left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha) \tag{5}$$

Предполагаем, что $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$\left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=0 \qquad \alpha\in(-\infty,\infty)$$

$$\left.\partial(g\Phi_m)\right|_{\beta=0}=0 \qquad \alpha\in(-\infty,-\alpha_2)\cup(-\alpha_1;\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty) \tag{6}$$

$$\left.(g\Phi_1)\right|_{\beta=0}=\left.(g\Phi_2)\right|_{\beta=0} \qquad \alpha\in(-\alpha_2;-\alpha_1)\cup(\alpha_1;\alpha_2)$$

$$\left.V_1\right|_{\beta=0}=\left.V_2\right|_{\beta=0} \qquad \alpha\in(-\alpha_2;\alpha_1)\cup(\alpha_1;\alpha_2)$$

Учитывая симметрию, бигармоническую функцию напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $m=1,2$ удобно представить интегралом Фурье такого вида:

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_m(\alpha,\beta)\cos t\alpha\,dt \quad (m=1,2) \tag{7}$$

где

$$f_m(t,\beta)=A_m(t)\operatorname{ch}t\beta\cos\beta+B_m(t)\operatorname{sh}t\beta\sin\beta+C_m(t)\operatorname{sh}t\beta\cos\beta+D_m(t)\operatorname{ch}t\beta\sin\beta \tag{8}$$

Удовлетворяя граничным (5) и частично контактным (6) условиям, получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$f_m(t,\beta_m)=\overline{\varphi}_m(t) \qquad f_m'(t,\beta_m)=\overline{\psi}_m(t)$$

$$f_m'(t,0)=0 \qquad f_m(t,0)=X(t) \qquad m=1,2 \tag{9}$$

где величины $\overline{\varphi}_m(t)$ и $\overline{\psi}_m(t)$ $(m=1,2)$ являются преобразованиями Фурье функций $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$

$$\overline{\varphi}_m(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi_m(\alpha)\cos t\alpha\,d\alpha$$

$$\overline{\psi}_m(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\psi_m(\alpha)\cos t\alpha\,d\alpha \qquad m=1,2 \tag{10}$$

а $X(t)$ – пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (9) для неизвестных $A_m(t),B_m(t),C_m(t)$ и $D_m(t)$ $(m=1,2)$, найдем значения через неизвестную $X(t)$

$$A_m(t)=X(t), \qquad D_m(t)=-tC_m(t)$$

$$B_m(t)=-\frac{t(\operatorname{sh}^2 t\beta_m+\sin^2\beta_m)}{\Delta_m(t)}X(t)+\frac{(t^2+1)\operatorname{sh}t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t)+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}t\beta_m\cos\beta_m-t\operatorname{ch}t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t) \tag{11}$$

$$C_m(t)=-\frac{\operatorname{sh}2t\beta_m+t\sin2\beta_m}{2\Delta_m(t)}X(t)-\frac{\operatorname{sh}t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\psi}_m(t)+$$

$$+\frac{t\operatorname{ch}t\beta_m\sin\beta_m+\operatorname{sh}t\beta_m\cos\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t) \qquad m=1,2$$

$$\Delta_m(t)=\operatorname{sh}^2 t\beta_m - t^2\sin^2\beta_m$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которая получается из смешанных контактных условий (6):

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty tX(t)\sin t\alpha\, dt = 0 \qquad \alpha\in(0,\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty)\\
&\int_0^\infty [M(t)X(t)+N(t)]\sin t\alpha\, dt = 0 \qquad \alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$M(t)=\frac{\Delta(t)}{2\Delta_1(t)\Delta_2(t)},\qquad N(t)=\frac{\Delta_3(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}$$

$$\Delta_3(t)=-\Delta_2(t)(t\operatorname{ch}t\beta_1\sin\beta_1+\operatorname{sh}t\beta_1\cos\beta_1)\overline{\varphi}_1(t)+\Delta_2(t)\operatorname{sh}t\beta_1\sin\beta_1\overline{\psi}_1(t)+$$
$$+h\Delta_1(t)(t\operatorname{ch}t\beta_2\sin\beta_2+\operatorname{sh}t\beta_2\cos\beta_2)\overline{\varphi}_2(t)-h\Delta_1(t)\operatorname{sh}t\beta_2\sin\beta_2\overline{\psi}_2(t)$$

$$\Delta(t)=(\operatorname{sh}2t\beta_1+t\sin\beta_1)(\operatorname{sh}^2 t\beta_2-t^2\sin^2\beta_2)-$$
$$-h(\operatorname{sh}2t\beta_2+t\sin 2\beta_2)(\operatorname{sh}^2 t\beta_1-t^2\sin^2\beta_1)$$

$$h=\frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)} \tag{13}$$

В случае, когда размеры областей и внешние усилия одинаковы, т.е. $\beta_2=-\beta_1$, $\overline{\varphi}_2=\overline{\varphi}_1$, $\overline{\psi}_2=-\overline{\psi}_1$, то из (13) получим

$$\begin{aligned}
&M(t)=\frac{1+h}{2\Delta_1(t)}(\operatorname{sh}2t\beta_1+t\sin 2\beta_1)\\
&N(t)=\frac{1+h}{\Delta_1(t)}\left[\operatorname{sh}t\beta_1\sin\beta_1\overline{\psi}_1(t)-(t\operatorname{ch}t\beta_1\sin\beta_1+\operatorname{sh}t\beta_1\cos\beta_1)\overline{\varphi}_1(t)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Как видно из (12), решение поставленных задач не зависит от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работах [4-9]. Применяя преобразование Фурье, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$X(t)=\frac{1}{\pi t}\int_0^\infty[(M(\tau)-\tau)X(\tau)+N(\tau)]K(t,\tau)d\tau \tag{15}$$

или

$$Y(t)=\frac{M(t)-t}{\pi t}\int_0^\infty K(t,\tau)Y(\tau)d\tau+N(t) \tag{16}$$

где

$$Y(t)=[(M(t)-t)]X(t)$$

$$K(t,\tau)=\frac{\sin(t+\tau)\alpha_2-\sin(t+\tau)\alpha_1}{t+\tau}-\frac{\sin(t-\tau)\alpha_2-\sin(t-\tau)\alpha_1}{t-\tau} \tag{17}$$

В частном случае при $\alpha_1=\alpha_2$ $X(t)=0$ и решение совпадает с решением, полученным в работе [7], а при $\alpha_1=0, \alpha_2=\infty$ $X(t)=-\frac{N(t)}{M(t)}$ решение совпадает с решением, полученным в работах [7-9].

На линии контакта характер нормальной напряжений в точках $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$ после некоторых преобразований имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_\beta^{(m)}(\alpha)\Big|_{\beta=0}=\frac{\operatorname{ch}\alpha+1}{\pi}\int_0^\infty\Bigg[\sin\tau\alpha_1\left(|\alpha-\alpha_1|^{-\frac{1}{2}}+|\alpha+\alpha_1|^{-\frac{1}{2}}\right)-\\ -\sin\tau\alpha_2\left(|\alpha_2-\alpha|^{-\frac{1}{2}}+|\alpha_2+\alpha|^{-\frac{1}{2}}\right)\Bigg]Y(\tau)d\tau+H(\alpha)\end{gathered} \tag{18}$$

При $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$ на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка $\frac{1}{2}$. В представленном виде член, содержащий особенность в точках $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_2$, разделен $aH(\alpha)\to 0$ при $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x=a$ (т.е. $\alpha=\infty$) в случае $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\infty$ $(X(t)=-N(t)/M(t))$, нормальное напряжение представим в виде

$$a\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[t^2\left(1+e^{-\alpha}\right)^2+it\left(1-e^{-2\alpha}\right)+2e^{-\alpha}\right]\frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)}e^{\alpha(1+it)}dt \tag{19}$$

Интеграл (20) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x<0$ или $\alpha<0$) или нижней (при $x>0$ или $\alpha>0$) полуокружностями радиуса $R\to\infty$ с центром в начале координат. Применяя теорему о вычетах, представим (19) в виде бесконечного ряда

$$\begin{gathered}a\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=0}=i\sqrt{2\pi}\left[t_1^2\left(1+e^{-\alpha}\right)^2+it\left(1+e^{-2\alpha}\right)+2e^{-\alpha}\right]\frac{\Delta_3(t_1)}{\Delta'(t_1)}e^{\alpha(1-\eta_1+i\xi_1)}+\\ +i\sqrt{2\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left[t_k^2\left(1+e^{-\alpha}\right)^2+it_k\left(1+e^{-2\alpha}\right)+2e^{-\alpha}\right]\frac{\Delta_3(t_k)}{\Delta'(t_k)}e^{\alpha(1+it_k)}\end{gathered} \tag{20}$$

где $t_k=\xi_k-i\eta_k$ — корни уравнения $\Delta(t)=0$ $(\xi_k>0,\ \eta_k>0)$.

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x=a$ $(\alpha=\infty)$ определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1=\xi_1-i\eta_1$ уравнения $\Delta t=0$. При $\eta_1>1$ имеем нулевое напряженное состояние, а при $\eta_1 < 1$ имеем концентрацию напряжений. В случае $\eta_1 = 1$ напряжения на краю поверхности контакта конечны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 232с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968.
3. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1976. Т. 29. №1. С. 51-56.
4. Абрамян Б.Л., Макарян В.С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями с учетом трения между слоями. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1976. Т.29. №5. С. 3-14.
5. Баблоян А.А., Мелконян М.Г., О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т. 27. №5. С. 3-18.
6. Мелконян М.Г., Мкртчян А.М. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1975. Т.28. №3. С. 13-28.
7. Арутюнян Л.А., Апикян Ж.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами // В. сб.: Инж. проблемы строительной механики. Ереван: ЕрПИ, 1985.
8. Арутюнян Л.А. Смешанная контактная задача для двух луночек. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48, №2. С.83-89.
9. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной круглой луночки с трещиной между материалами. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №2. С.3-10.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.03.2001