ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №1, 2001** Механика

УДК 539.3

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Белубекян М. В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան
Երկշերտ սալի անկայունությունը ծռող մոմենտի ազդեցության դեպքում

Հաստատված է, որ որոշակի եզրային պայմանների դեպքում, ուղղանկյուն սալի ճկվածքի որոշման խնդիրը անջատվում է ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի որոշման խնդրից: Ապացուցված է, որ եզրերում կիրառված ծռող մոմենտի կամ լայնական բեռի ազդեցության դեպքերում հնարավոր են սեղմող ճիգեր կախված շերտերի նյութերի Պուասոնի գործակիցների տարբերությունից:

M. V. Belubekyan
Nonstability of the two-layered plate under the action of the bending moment

На основе гипотезы Кирхгофа рассматриваются статические задачи определения напряженно-деформированного состояния двухслойной пластинки. Установлено, что при определенных граничных условиях на кромках прямоугольной в плане пластинки, задача определения прогиба пластинки отделяется от задачи определения обобщенного плоского напряженного состояния.

Показано, что усилия в пластинке под действием изгибающих моментов, приложенных на кромках, или поперечной нагрузки могут быть сжимающими в зависимости от знака разницы коэффициентов Пуассона материалов слоев.

Определены критические нагрузки, при которых имеет место неустойчивость пластинки.

Напряженно-деформированное состояние двуслойной пластинки, ввиду наличия несимметричности относительно средней плоскости, имеет много общего с состоянием однослойной оболочки. Как известно, оболочка под действием поперечной (внешней) нагрузки может потерять устойчивость. Может ли поперечная нагрузка привести к потере устойчивости двухслойной пластинки? Впервые вопрос о неустойчивости пластинки, обусловленной несимметричностью, под действием поперечной нагрузки обсуждался в [1,2].

1.Пусть двухслойная пластинка в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h_2 \le z \le h_1$. В последующем индекс (1) относится к слою $0 \le z \le h_1$, а индекс (2) – к слою $-h_2 \le z \le 0$. Рассматриваются статические задачи, когда либо задана поперечная нагрузка $q(x, y)$ на лицевой поверхности пластинки $z = -h_2$, либо пластинка изгибается под действием изгибающих моментов, приложенных на кромках пластинки. Принимается гипотеза Кирхгофа для пакета в целом, в частности, для перемещений

$$u_1 = u - z\frac{\partial w}{\partial x},\ u_2 = \mathrm{v} - z\frac{\partial w}{\partial y}, u_3 = w;\quad u, \mathrm{v}, w \sim (x, y) \qquad (1.1)$$

В работе [3], при помощи преобразования

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{k_1-k_2}{c_1+c_2}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \mathrm{v}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{k_1-k_2}{c_1+c_2}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.2}$$

уравнения, определяющие напряженно-деформированное состояние пластинки, приводятся к виду

$$\Delta\varphi=0,\ \Delta\psi=0,\ D\Delta^2 w=q \tag{1.3}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$c_i=\frac{E_i h_i}{1-\nu_i^{\,2}},\quad k_i=\frac{E_i h_i^{\,2}}{2\left(1-\nu_i^{\,2}\right)},\quad D_i=\frac{E_i h_i^{\,3}}{3\left(1-\nu_i^{\,2}\right)},\quad i=1,2 \tag{1.4}$$

$$D=D_1+D_2-(c_1+c_2)^{-1}(k_1-k_2)^2$$

Таким образом получаются раздельные уравнения относительно искомых функций φ, ψ, w, что приводит к установлению эффективной жесткости D пластинки на изгиб.

В [3] показано, что если края пластинки жестко закреплены

$$u_1=u_2=u_3=0 \quad \text{при } x=0,a,\ \ y=0,b \tag{1.5}$$

то осредненные граничные условия получаются в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ w=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \ \text{ при }\ x=0,a \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ w=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0 \ \text{ при }\ y=0,b$$

Из уравнений (1.3) и граничных условий (1.6) для функций φ и ψ следует решение

$$\varphi=\psi\equiv 0 \tag{1.7}$$

т.е. задача определения напряженно-деформированного состояния двухслойной пластинки сводится к обычной задаче определения прогиба однослойной пластинки с эффективной жесткостью на изгиб D.

Пусть на шарнирно-закрепленном крае $x=\mathrm{const}$ пластинки приложена нагрузка

$$\sigma_{11}=\sigma_0(z) \tag{1.8}$$

так, что

$$T_1=\int_{-h_1}^{h_1}\sigma_0(z)dz=0,\quad M_1=\int_{-h_2}^{h_1}z\sigma_0(z)dz=M_0 \tag{1.9}$$

Тогда граничные условия на краю $x=\mathrm{const}$ будут иметь вид

$$T_1=0,\ \mathrm{v}=0,\ w=0,\ M_1=M_0 \tag{1.10}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{k_1-k_2}{c_1+c_2}\frac{M_0}{D},\ \mathrm{v}=0,\ \ w=0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{M_0}{D} \tag{1.11}$$

С помощью преобразования (1.2) условия (1.11) принимают форму

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=0,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \ w=0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{M_0}{D} \tag{1.12}$$

Наконец, необходимо рассмотреть граничные условия типа скользящего контакта.

Если на кромке пластинки $x = \text{const}$ заданы условия

$$u_1 = 0,\ \sigma_{12} = 0,\ \sigma_{13} = 0 \tag{1.13}$$

то соответствующие условия в итоге приводятся к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\frac{\partial w}{\partial x} - (k_1 - k_2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] = 0 \tag{1.14}$$

Таким образом, как и в случае граничных условий жесткой заделки (1.6), условия шарнирного закрепления типа (1.12) и скользящего контакта (1.14) являются однородными относительно функций φ и ψ. Отсюда следуют равенства (1.7) и задача сводится к обычной задаче определения прогиба w пластинки. Еще раз необходимо подчеркнуть, что равенства (1.7) имеют место при граничных условиях вида (1.6), (1.12), (1.14) и при их всевозможных сочетаниях.

При остальных вариантах граничных условий, например, когда какой-либо край пластинки свободен, равенства (1.7) не имеют места.

После определения прогиба пластинки, остальные расчетные величины будут определяться по следующим формулам:

$$u = \frac{k_1 - k_2}{c_1 + c_2}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \text{v} = \frac{k_1 - k_2}{c_1 + c_2}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.15}$$

$$T_1 = (\nu_2 - \nu_1)k_c\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ T_2 = (\nu_2 - \nu_1)k_c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ S = (\nu_1 - \nu_2)k_c\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1.16}$$

$$M_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_c\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$H = -D(1 - \nu_c)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\ N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w,\ N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w \tag{1.17}$$

где

$$k_c = \frac{c_1k_2 + c_2k_1}{c_1 + c_2}, \nu_c = \frac{(c_1 + c_2)(\nu_1D_1 + \nu_2D_2) - (k_1 - k_2)(\nu_1k_1 - \nu_2k_2)}{(c_1 + c_2)D} \tag{1.18}$$

Из (1.16) следует, что при $\nu_1 = \nu_2$ усилия T_1, T_2, S тождественно равны нулю. В общем случае знак усилий существенно зависит от знака разницы $\nu_2 - \nu_1$. Поэтому возможно появление сжимаюших усилий, что может привести к неустойчивости пластинки. Формулы (1.17) показывают, что параметр ν_c можно принять в качестве эффективного коэффициента Пуассона двухслойной пластинки. При этом, если $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, то $\nu_c = \nu$ согласно (1.18).

Прямоугольная пластинка загружена только изгибающими моментами M_0 на шарнирно-закрепленных краях $x=0, a$ $(q=0)$. На краях $y=0, b$ принимаются условия скользящего контакта. В этом случае задача приводится к решению уравнения

$$\Delta^2 w_0 = 0 \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$w_0 = 0, \ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{M_0}{D} \ \text{при} \ x=0, a; \ \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \ \text{при} \ y=0, b \tag{2.2}$$

Решение приведенной задачи известно

$$w_0 = \frac{M_0 a^2}{2D} \xi(1-\xi), \quad \xi = \frac{x}{a} \tag{2.3}$$

Остальные величины должны определяться по формулам (1.15) - (1.17). В частности,

$$T_2 = -(\nu_2 - \nu_1) k_c M_0 D^{-1}, \ T_1 = S = 0 \tag{2.4}$$

При изгибе моментами появляется усилие $T_2 = \text{const}$, знак которого зависит от знака разницы $\nu_2 - \nu_1$. При условии $\nu_2 > \nu_1$ усилие T_2 будет сжимающим. Поэтому возможна потеря устойчивости пластинки. Если начальному состоянию пластинки, определяемому по выражениям (2.3), (2.4), придать возмущение $w = w(x, y)$, то задача устойчивости приведется к решению уравнения

$$D\Delta^2 w - T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{2.5}$$

с граничными условиями

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0, a$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0, b \tag{2.6}$$

Представление решения задачи в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \sin\mu_m x \cos\lambda_n y, \ \mu_m = \frac{m\pi}{a}, \ \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \tag{2.7}$$

удовлетворяет граничным условиям (2.6).

Подстановка (2.7) в уравнение (2.5) с учетом (2.4) приводит к определению значений приложенного изгибающего момента, определяющих нетривиальные решения задачи

$$M_{mn} = \frac{\left(\mu_m{}^2 + \lambda_n{}^2\right)^2}{\lambda_n{}^2} \frac{D^2}{(\nu_2 - \nu_1) k_c} \tag{2.8}$$

Из (2.8) нетрудно показать, что минимальное критическое значение изгибающего момента M_0, при котором имеет место неустойчивость, достигается при $m = 1, n = s = E(b/a)$, где $E(b/a)$ означает целую часть отношения b/a плюс единица,

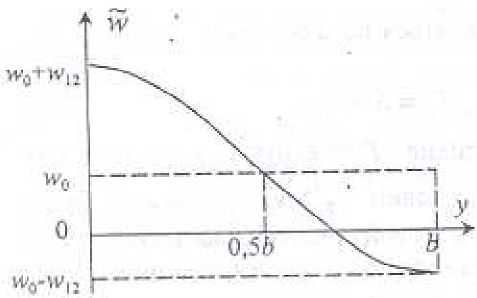
$$M^{*}=\frac{\left(\mu_1^{\,2}+\lambda_s^2\right)}{\lambda_s^2}\frac{D^2}{\left(\nu_2-\gamma_1\right)k_c} \tag{2.9}$$

В частности, для квадратной пластинки $(a=b)$

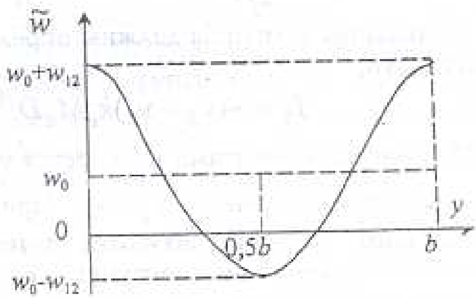
$$M^{*}=4(\nu_2-\nu_1)^{-1}\pi^2 D^2 a^{-2} k_c^1 \tag{2.10}$$

На фиг.1 приводится форма потери устойчивости квадратной пластинки $(a=b)$ для сечения $x=0{,}5a$.

Пунктирная линия соответствует начальному прогибу пластинки, сплошная — после потери устойчивости. На фиг.2 приводится форма потери устойчивости прямоугольной пластинки с размерами $b=2a$ для сечения $x=0{,}5a$. В этом случае критическое значение момента также определяется по формуле (2.10).



Фиг. 1



Фиг. 2

О порядке величины критической нагрузки можно судить по следующему примеру:

$$\begin{aligned} &\nu_1=0,\ \nu_2=0{,}5,\ h_1=h_2=h,\ b=a \\ &M^{*}\approx 4{,}2\pi^2 E_1 h^4 a^{-2} \quad \text{при} \quad E_2=0{,}1E_1 \\ &M^{*}\approx 8{,}5\pi^2 E_1 h^4 a^{-2} \quad \text{при} \quad E_2=E_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

3.Пусть края прямоугольной пластинки $x=0,a$ шарнирно закреплены, а на краях $y=0,b$ даны условия скользящего контакта. На пластинку действует поперечная нагрузка $q=q_0\sin\mu_1 x$.

Задача изгиба приводится к решению уравнения

$$D\Delta^2 w_0 = q_0 \sin\mu_1 x \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$w_0=0,\ \ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=0 \qquad \text{при} \quad x=0,\ a$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}=0 \qquad \text{при} \quad y=0,\ b \tag{3.2}$$

Решение приведенной задачи известно — пластинка принимает форму цилиндрической поверхности

$$w=q_0 D^{-1}\mu_1^{-4}\sin\mu_1 x \tag{3.3}$$

Имея решение (3.3), можно найти перемещения, усилия и моменты по формулам (1.15) -(1.17). В частности,

$$T_2 = -(\nu_2 - \nu_1)\frac{q_0 k_c}{D\mu_1^2}\sin\mu_1 x, \quad T_1 = S = 0 \tag{3.4}$$

Задача устойчивости, как и в предыдущем случае, приводится к нахождению нетривиальных решений уравнения (2.5) с граничными условиями (2.6) с той лишь разницей, что здесь усилие T_2 является функцией координаты x.

Решение уравнения (2.5), удовлетворяющее граничным условиям при $y = 0, b$ из (2.6), имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\cos\lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a} \tag{3.5}$$

Подстановка (3.5) в уравнение (2.5) и граничные условия при $x = 0, a$ из (2.6) приводит к задаче нахождения собственных значений уравнения

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2 f_n^{II} + \lambda_n^4\left[1 - (\nu_2 - \nu_1)q_0 k_c (\mu_1\lambda_n D)^{-2}\sin\mu_1 x\right]f_n = 0 \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$f_n = 0, \quad f_n^{II} = 0 \qquad \text{при } x = 0, a \tag{3.7}$$

Очевидно, что эта задача при условии $\nu_2 > \nu_1$ имеет положительные собственнные значения. Собственные значения можно найти применением различных приближенных методов. В частности, в первом приближении по методу Галеркина получается

$$q_{1n} = \frac{3\mu_1^3 a(\mu_1^2 + \lambda_n^2)^2}{8(\nu_2 - \nu_1)k_c\lambda_n^2}D^2 \tag{3.8}$$

Минимальное значение критической нагрузки q_{1n} получается при $n = E(b/a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнуни В.Ц., Микаелян Г.З. Выпучивание длинной эксцентрично-закрепленной пластинки под действием поперечной нагрузки//Докл. АН Арм.ССР. 1970. Т. 51. N3. С. 140-143.
2. Гнуни В. Ц., Микаелян Г. З. Выпучивание длинных слоистых пластин и цилиндрических панелей//Изв.АН Арм ССР. Механика. 1971. Т. 24. №2. С. 39-45.
3. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Об одном подходе к определению эффективных модулей несимметрично собранных пластин. Проблемы прочности и пластичности. Н. Новгород. Изд. Нижегородского университета. 2000. Т. 61. С. 26-30.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
18.04.2000