ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №1, 2001 Механика

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА СЛОЕВ

Барсегян В.М., Хачатрян А.М.

Վ.Մ.Բարսեղյան, Ա.Մ. Խաչատրյան
Եռաշերտի համար խառը եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծման մասին շերտերի միջև կոնտակտի տարբեր պայմաններում

Ասիմպտոտիկ մեթոդով ստացված են անիզոտրոպ ջերմաառաձգական շերտի խառը եզրային խնդիրների լուծումներ, շերտերի միջև տարբեր եզրային պայմանների դեպքում. ա) երբ շերտերի միջև կոնտակտը ոչ լրիվ է, բ) երբ առաջին և երկրորդ շերտերի միջև կոնտակտը ոչ լրիվ է, իսկ երկրորդ և երրորդ շերտերի միջև լրիվ, գ) երբ առաջին և երկրորդ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է, իսկ երկրորդ և երրորդ շերտերի միջև ոչ լրիվ, դ) երբ բոլոր շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է (իդեալական կոնտակտ):

V.M.Barsegyan, A.M.Khachatryan
On asymptotic solution of a mixed boundary problem for a three-layered stripe under different condictions of rhe contact between the stripes

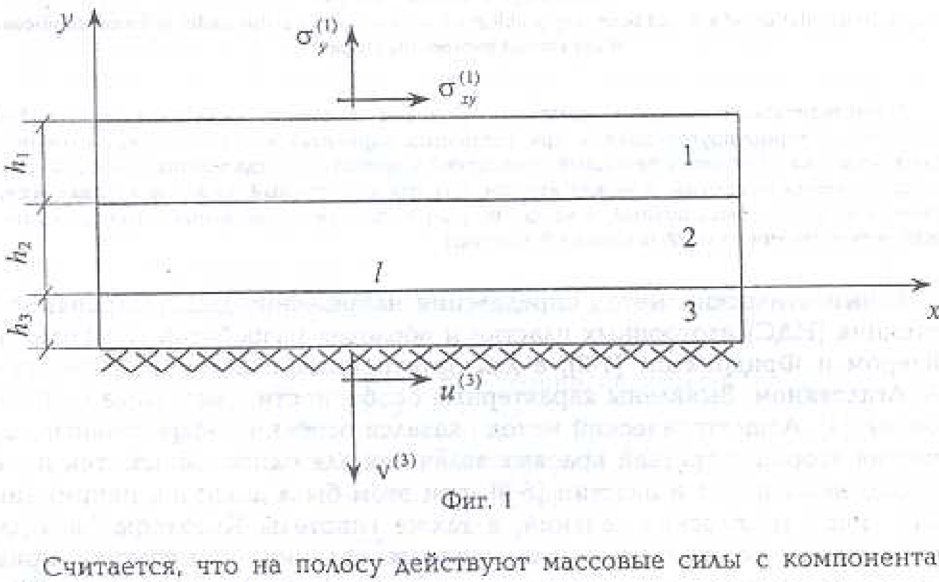
Асимптотическим методом получены решения краевых задач для трехслойной анизотропной термоупругой полосы при различных вариантах контакта между слоями: а) когда контакт между слоями неполный (нежесткий контакт), б) когда контакт между первым и вторым слоями неполный, а между вторым и третьим — полный, в) когда контакт между первым и вторым слоями полный, а между вторым и третьим — неполный, г) когда контакт между всеми слоями полный (идеальный контакт).

Асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропных пластин и оболочек разработан А.Л.Гольденвейзером и Фридрихсом [1-3], а для ортотропных пластин и оболочек — Л.А. Агаловяном. Выявлены характерные особенности, связанные с анизотропией [4]. Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения второй и третьей краевых задач как для однослойных, так и для многослойных полос и пластин [5-9], при этом была доказана неприменимость гипотезы плоских сечений, а также гипотезы Кирхгофа-Лява для этих случаев. Установленная для искомых величин асимптотика принципиально отличалась от асимптотики тех же величин в первой краевой задаче теории упругости. В [10] при помощи преобразования Фурье решена двумерная плоская задача определения напряжений в теле, состоящем из однородных изотропных упругих слоев. В [11] построено решение внутренней задачи для анизотропной двухслойной балки-полосы, когда на продольных сторонах заданы значения напряжений, а на линии контакта — закон распределения касательного напряжения, в [12] рассмотрена задача определения НДС анизотропной двухслойной балки-полосы, когда на продольных сторонах заданы условия первой или смешанной краевых задач теории упругости, между слоями — условия неполного контакта: на линии контакта задан закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения.

В [13] исследовано НДС трехслойной анизотропной термоупругой полосы при неполном контакте между слоями, когда на одной из продольных сторон заданы значения напряжений, а на другой — значения компонентов вектора перемещения. На линиях контакта считается заданным закон распределения касательных напряжений. Асимптотический метод использован в [14] для решения первой краевой задачи теории упругости для двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений

Рассматривается плоская задача для анизотропной трехслойной полосы длиною l и толщиной H $(H = h_1 + h_2 + h_3)$, на одной продольной стороне которой заданы значения напряжений, а на другой — значения компонентов вектора перемещения. Слои имеют различные толщины h_k, коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$ $(k = 1,2,3)$. Требуется найти решение смешанной краевой задачи для трехслойной анизотропной термоупругой полосы в области $\Omega = \{(x,y) : x \in [0,l], -h_3 \le y \le h_1 + h_2, H << l\}$ при различных вариантах контакта между слоями (фиг. 1).



Фиг. 1

Считается, что на полосу действуют массовые силы с компонентами $F_x^{(k)}(x,y), F_y^{(k)}(x,y)$ $(k = 1,2,3)$ и температурные воздействия. Изменение температурного поля $\theta^{(k)}(x,y) = T^{(k)}(x,y) - T_0^{(k)}(x,y)$ считается известной функцией. Ось Ox проходит по линии контакта второго и третьего слоев.

Условия на продольных линиях задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{+}(x), \quad \sigma_y^{(1)} = \varepsilon^{-1}\sigma_y^{+}(x) \quad \text{при } y = h_1 + h_2 \\ &u^{(3)} = \varepsilon^{-1}u^{-}(x), \quad v^{(3)} = \varepsilon^{-1}v^{-}(x) \quad \text{при } y = -h_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Условия контакта задаются по формулам:

а) контакт между всеми слоями неполный

$$
\begin{aligned}
&v^{(1)} = v^{(2)},\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \\
&u^{(1)} - u^{(2)} = æ_1 \frac{l}{h} \sigma_{xy}^{(1)}(h_2)
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad y = h_2 \tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&v^{(2)} = v^{(3)},\ \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)},\ \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(3)} \\
&u^{(2)} - u^{(3)} = æ_2 \frac{l}{h} \sigma_{xy}^{(2)}(0)
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad y = 0
$$

б) контакт между первым и вторым слоями неполный, а между вторым и третьим — полный

$$
\begin{aligned}
&v^{(1)} = v^{(2)},\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \\
&u^{(1)} - u^{(2)} = æ_1 \frac{l}{h} \sigma_{xy}^{(1)}(h_2)
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad y = h_2 \tag{1.3}
$$

$$
u^{(2)} = u^{(3)},\ v^{(2)} = v^{(3)},\ \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)},\ \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(3)} \quad \text{при} \quad y = 0
$$

в) контакт между первым и вторым слоями полный, а между вторым и третьим — неполный

$$
u^{(1)} = u^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \quad \text{при} \quad y = h_2
$$

$$
\begin{aligned}
&v^{(2)} = v^{(3)},\ \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)},\ \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(3)} \\
&u^{(2)} - u^{(3)} = æ_2 \frac{l}{h} \sigma_{xy}^{(2)}(0)
\end{aligned}
\qquad \text{при} \quad y = 0 \tag{1.4}
$$

г) контакт между всеми слоями полный (идеальный контакт)

$$
\begin{aligned}
&u^{(1)} = u^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\ \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \quad \text{при} \quad y = h_2 \\
&u^{(2)} = u^{(3)},\ v^{(2)} = v^{(3)},\ \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)},\ \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(3)} \quad \text{при} \quad y = 0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

В формулах (1.1)-(1.5) $h = \max h_k$, $\varepsilon = h/l$. Постоянные $æ_1$ и $æ_2$ имеют размерность м^3/Н. Предельному случаю $æ_1 = 0$ и $æ_2 = 0$ соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю $æ_1 \to \infty$ или $æ_2 \to \infty$ — скользящий контакт на линиях контакта $y = h_2$ или $y = 0$ [15].

Требуется найти решение уравнений теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (1.1), условиях контакта, выражаемых по одной из формул (1.2)-(1.5), а также условиях на поперечных кромках $x = 0, l$, которые пока не конкретизируются.

Чтобы решить сформулированную задачу, перейдем к безразмерным координатам и перемещениям $\xi = x/l, \zeta = y/h,\ U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$. Тогда решение задачи сводится к решению следующей сингулярно возмущенной малым параметром ε системы:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k)}}{\partial\zeta}+aF_x^{(k)}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k)}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial\zeta}+aF_y^{(k)}=0$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial\xi}=a_{11}^{(k)}\sigma_x^{(k)}+a_{12}^{(k)}\sigma_y^{(k)}+a_{16}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k)}+\alpha_{11}^{(k)}\theta^{(k)} \tag{1.6}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial\zeta}=a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k)}+a_{22}^{(k)}\sigma_y^{(k)}+a_{26}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k)}+\alpha_{22}^{(k)}\theta^{(k)}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(k)}}{\partial\xi}=a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k)}+a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k)}+\alpha_{12}^{(k)}\theta^{(k)}$$

$\alpha_{ij}^{(k)}$ — коэффициенты теплового расширения каждого слоя.

Решение подобных сингулярно возмущенных систем складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев [1-4].

Решение внутренней задачи ищем в виде [1-4]

$$Q^{(k)}=\varepsilon^{q_k+s}Q^{(k,s)}(\xi,\zeta),\qquad s=\overline{0,S} \tag{1.7}$$

где $Q^{(k)}$ — любое из напряжений и перемещений, q_k — целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(k,s)}$. Число s указывает номер приближения, а S — число приближений.

Непротиворечивыми значениями q_k будут [4,12]

$$q_k=-1 \quad \text{для} \quad \sigma_x^{(k)},\sigma_y^{(k)},U^{(k)},V^{(k)} \tag{1.8}$$

$$q_k=0 \quad \text{для} \quad \sigma_{xy}^{(k)}$$

Влияние массовых сил и температурного поля будет соизмеримым с влиянием поверхностных сил, если они будут иметь асимптотические порядки

$$F_x^{(k)}=\varepsilon^{-1+s}a^{-1}F_x^{(k,s)},\quad F_y^{(k)}=\varepsilon^{-2+s}a^{-1}F_y^{(k,s)}$$
$$\theta^{(k)}=\varepsilon^{-1+s}\theta^{(k,s)} \tag{1.9}$$

В противном случае соответствующие слагаемые войдут в последующие приближения, и часто в практических приложениях ими можно пренебречь.

Подставив (1.7) в (1.6), с учетом (1.8), (1.9) приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему относительно $Q^{(k,s)}$, решив которую, получим

$$V^{(k,s)}=\mathrm{v}^{(k,s)}(\xi)+\mathrm{v}^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$U^{(k,s)}=u^{(k,s)}(\xi)+u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(k,s)}=\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)+\sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta) \tag{1.10}$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\left[\frac{du^{(k,s)}}{d\xi} - a_{12}^{(k)}\sigma_{y0}^{(k,s)}\right] + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy0}^{(k,s)} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\left[\frac{d^2u^{(k,s)}}{d\xi^2} - a_{12}^{(k)}\frac{d\sigma_{y0}^{(k,s)}}{d\xi}\right]\zeta + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

где величины со звездочками — известные функции от ξ,ζ для каждого приближения s, если определены величины предыдущих приближений. Они определяются по формулам

$$v^{*(k,s)} = \int_0^\zeta\left[a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)} + \alpha_{22}^{(k)}\theta^{(k,s-1)}\right]d\zeta$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^\zeta\left[a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)} + \alpha_{12}^{(k)}\theta^{(k,s-1)} - \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial\xi}\right]d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\left(\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial\xi} - a_{12}^{(k)}\sigma_y^{*(k,s)} - a_{16}^{(k)}\sigma_{xy}^{*(k,s-1)} - \alpha_{11}^{(k)}\theta^{(k,s)}\right) \tag{1.11}$$

$$\sigma_y^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial\sigma_{xy}^{(k,s-2)}}{\partial\xi} + F_y^{(k,s)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{xy}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial\sigma_x^{(k,s)}}{\partial\xi} + F_x^{(k,s)}\right)d\zeta$$

В (1.10) неизвестными являются функции $\sigma_{xy0}^{(k,s)}, \sigma_{y0}^{(k,s)}, u^{(k,s)}$, $v^{(k,s)}$ $(k=1,2,3)$, которые определяются из условий (1.1)-(1.5).

а) Удовлетворив условиям (1.1) и (1.2), часть неизвестных функций определяется непосредственно:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)\\
&\sigma_{y0}^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_2) - \sigma_y^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)\\
&\sigma_{y0}^{(2,s)} = \sigma_{y0}^{(3,s)}\\
&v^{(3,s)} = v^{-(s)} - v^{*(3,s)}(\xi,\zeta_3), \quad v^{(2,s)} = v^{(3,s)}\\
&v^{(1,s)} = v^{-(s)} - v^{*(3,s)}(\xi,\zeta_3) + v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) - v^{*(1,s)}(\xi,\zeta_2)\\
&u^{(3,s)} = u^{-(s)} - u^{*(3,s)}(\xi,\zeta_3)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Величины $u^{(2,s)}, \sigma_{xy0}^{(1,s)}, \sigma_{xy0}^{(3,s)}$ выражаются через функции $\sigma_{xy0}^{(2,s)}, u^{(1,s)}$:

$$\begin{aligned}
&u^{(2,s)} = u^{-(s)} - u^{*(3,s)}(\xi,\zeta_3) + æ_2\sigma_{xy0}^{(2,s)}\\
&\sigma_{xy0}^{(3,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)}\\
&\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}\zeta_1 + \sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi}\zeta_1
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Для определения же неизвестных функций $\sigma_{xy0}^{(2,s)}$ и $u^{(1,s)}$ получим систему

$$\varpi_1 C_{11}^{(1)} \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - u^{(1,s)} + \varpi_2 \sigma_{xy0}^{(2,s)} = p_1^{(s)}$$
$$C_{11}^{(1)} \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + \varpi_2 C_{11}^{(2)} \frac{d^2 \sigma_{xy0}^{(2,s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy0}^{(2,s)} = p_2^{(s)} \tag{1.14}$$

где

$$C_{11}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}}(\zeta_1 - \zeta_2) = \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\frac{h_1}{h}, \quad C_{11}^{(2)} = \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}} = \frac{1}{a_{11}^{(2)}}\frac{h_2}{h}$$

$$p_1^{(s)} = -u^{-(s)} - \varpi_1\left[\sigma_{xy}^{+(s)} + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}(\zeta_1 - \zeta_2)\right] +$$
$$+ u^{*(3,s)}(\xi,\zeta_3) + \varpi_1\left[\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_2) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}(\zeta_1 - \zeta_2)\right]$$

$$p_2^{(s)} = -\sigma_{xy}^{+(s)} - \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}\frac{d^2 u^{-(s)}}{d\xi^2} + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}\zeta_2 +$$
$$+ \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_2) + \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}(\zeta_1 - \zeta_2) +$$
$$+ \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}\frac{d}{d\xi}\left(-\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_2) - \sigma_y^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)\right) + \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}\frac{d^2 u^{*(3,s)}(\xi,\zeta_3)}{d\xi^2}$$

$$\zeta_1 = \frac{h_1 + h_2}{h}, \quad \zeta_2 = \frac{h_2}{h}, \quad \zeta_3 = -\frac{h_3}{h} \tag{1.15}$$

б) Контакт между первым и вторым слоями неполный, а между вторым и третьим слоями полный ($\varpi_2 = 0, \varpi_1 \neq 0$). Система уравнений (1.14) преобразуется к виду

$$\varpi_1 C_{11}^{(1)} \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - u^{(1,s)} = p_1^{(s)}$$
$$\sigma_{xy0}^{(2,s)} = C_{11}^{(1)} \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - p_2^{(s)} \tag{1.16}$$

Из первого уравнения (1.16) определяется неизвестная функция $u^{(1,s)}$, из второго – $\sigma_{xy0}^{(2,s)}$.

в) Контакт между первым и вторым слоями полный, а между вторым и третьим слоями неполный ($\varpi_1 = 0, \varpi_2 \neq 0$). Система уравнений (1.14) будет иметь вид

$$\varpi_2 \sigma_{xy0}^{(2,s)} = u^{(1,s)} + p_1^{(s)} \tag{1.17}$$

$$æ_2\left(C_{11}^{(1)}+C_{11}^{(2)}\right)\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}-u^{(1,s)}=æ_2\left(p_2^{(s)}-C_{11}^{(2)}\frac{d^2p_1^{(s)}}{d\xi^2}\right) \quad (1.18)$$

г) Контакт между всеми слоями полный ($æ_1=æ_2=0$). Тогда система уравнений (1.14) превращается в систему алгебраических уравнений, откуда определяются неизвестные $u^{(1,s)}$ и $\sigma_{xy0}^{(2,s)}$

$$u^{(1,s)}=-p_1^{(s)}$$

$$\sigma_{xy0}^{(2,s)}=-C_{11}^{(1)}\frac{d^2p_1^{(s)}}{d\xi^2}-p_2^{(s)} \quad (1.19)$$

Сравнивая уравнения (1.14)-(1.19), заметим: количество полученных дифференциальных уравнений (во всех случаях) совпадает с числом степеней свободы слоев, если их рассматривать как жесткое тело.

2. Решение дифференциальных уравнений

Систему уравнений (1.14) можно привести к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно $u^{(1,s)}$, если из первого уравнения $\sigma_{xy0}^{(2,s)}$ выразить через $u^{(1,s)}$:

$$\sigma_{xy0}^{(2,s)}=\frac{1}{æ_2}\left(u^{(1,s)}-æ_1C_{11}^{(1)}\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}+p_1^{(s)}\right), \quad æ_2\neq 0 \quad (2.1)$$

и подставить во второе уравнение. В итоге получим

$$æ_1æ_2C_{11}^{(1)}C_{11}^{(2)}\frac{d^4u^{(1,s)}}{d\xi^4}-\left[(æ_1+æ_2)C_{11}^{(1)}+æ_2C_{11}^{(2)}\right]\frac{d^2u^{(1,s)}}{d\xi^2}+u^{(1,s)}=p^{(s)} \quad (2.2)$$

где

$$p^{(s)}=-p_1^{(s)}-æ_2\left(p_2^{(s)}-C_{11}^{(2)}\frac{d^2p_1^{(s)}}{d\xi^2}\right) \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.2) складывается из общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению (2.2), имеет вид

$$æ_1æ_2C_{11}^{(1)}C_{11}^{(2)}\lambda^4-\left[(æ_1+æ_2)C_{11}^{(1)}+æ_2C_{11}^{(2)}\right]\lambda^2+1=0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет только вещественные корни, так как дискриминант соответствующего квадратного уравнения всегда положителен:

$$D=\left(æ_1C_{11}^{(1)}-æ_2C_{11}^{(2)}\right)^2+æ_2C_{11}^{(1)}\left[(2æ_1+æ_2)C_{11}^{(1)}+2æ_2C_{11}^{(2)}\right] \quad (2.5)$$

Общим решением дифференциального уравнения (2.2) является

$$u^{(1,s)}=C_1^{(s)}\mathrm{ch}\lambda_1\xi+C_2^{(s)}\mathrm{sh}\lambda_1\xi+C_3^{(s)}\mathrm{ch}\lambda_2\xi+C_4^{(s)}\mathrm{sh}\lambda_2\xi+\bar{u}^{(s)}(\xi) \quad (2.6)$$

где $\bar{u}^{(s)}(\xi)$ – частное решение, $C_i^{(s)}$ – неизвестные постоянные интегрирования, а λ_1 и λ_2 вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{(æ_1 + æ_2)C_{11}^{(1)} + æ_2 C_{11}^{(2)} + \sqrt{D}}{2æ_1 æ_2 C_{11}^{(1)} C_{11}^{(2)}}}$$
$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(æ_1 + æ_2)C_{11}^{(1)} + æ_2 C_{11}^{(2)} - \sqrt{D}}{2æ_1 æ_2 C_{11}^{(1)} C_{11}^{(2)}}} \qquad (2.7)$$

Имея решение (2.6), по формулам (2.1), (1.10)-(1.13) вычисляются значения всех перемещений и напряжений для каждого слоя.

Общим решением уравнений (1.16) и (1.18) является

$$u^{(1,s)} = C_1^{(s)} \mathrm{ch}\lambda\xi + C_2^{(s)} \mathrm{sh}\lambda\xi + \bar{u}^{(s)}(\xi) \qquad (2.8)$$

где $\bar{u}^{(s)}(\xi)$ – частное решение уравнения (1.16) или (1.18), $C_1^{(s)}$ и $C_2^{(s)}$ – неизвестные константы интегрирования, а

$$\lambda = \left(æ_1 C_{11}^{(1)}\right)^{-1/2} \qquad (2.9)$$

для уравнения (1.16) и

$$\lambda = \left(æ_2 \left(C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}\right)\right)^{-1/2} \qquad (2.10)$$

для уравнения (1.18).

Решения (2.6) и (2.8) содержат соответственно четыре и два постоянных интегрироавания, что позволяет удовлетворить четырем или двум торцевым условиям в интегральной форме. Для более точного удовлетворения торцевым условиям необходимо иметь решение типа пограничного слоя. Такое решение можно построить аналогичным с [16] образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. С.668-686.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608.
3. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates// Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol.14, No1.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука,1997. 414с.

5. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Межвуз. сб. научн. трудов ЕГУ. Механика. 1982. Вып.2. С.7-12.

6. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера// Тр. XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин, 1983, с.13-18.

7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. // В сб.: Механика конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С.105-110.

8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок// ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.271-278.

9. Геворкян Р.С. О двух смешанных краевых задачах для двухслойных анизотропных пластин//Межвуз. сб. ЕГУ. Механика. 1986. Вып.4. С.189-196.

10. Bufler H. Der Spannungszustand in einer geschichteten Scheibe// ZAAM 41 (1961) Heft 4, Seite 158-180.

11. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной балки с проскальзыванием//Материалы Всесоюзн. научного семинара "Актуальные проблемы неоднородной механики". Ереван, 1991. 390с.

12. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двух задачах анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями.// Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. №3-4. С.34-41.

13. Барсегян В.М. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для трехслойной полосы, когда между слоями выполняется полный и неполный контакт// Тр. Межд. конф. "Теоретическая и прикладная механика". Ереван, 1994.

14. Хачатрян А.М. Об уравнениях двухслойной пластинки при нежестком контакте слоев// Докл.НАН Армении. 1999. Т.99. №2. С.159-165.

15. Композиционные материалы. Т.6. Технологичные напряжения и деформации в материалах// Под ред. Шульги Н.А. и Томашевского В.Т.— Киев, 1997 . 394с.

16. Барсегян В.М. Пограничный слой трехслойной анизотропной полосы, когда между слоями выполняется полный и неполный контакт//Докл. НАН Армении. 1997. Т.97. №3. С.7-12.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
8.08.2000