

УДК 539.3

ТЕОРИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С
 УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

(Ը.1)

Амбарцумян С.А.

Ս. Ա. Համբարձումյան

Տրանսվերսալ իզոտրոպ սալի տեսությունը մոմենտային շարունակների հաշվառմամբ

Չեղկերկրված են տրանսվերսալ-առաձգական մարմնի մոմենտային առաձգականության տեսության ելակետային հավասարումները և առկայությունները: Ստացված են քարակ տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալերի կիմնական հավասարումները մոմենտային շարունակների հաշվառմամբ [1-9]: Դիտարկված են որոշ մոդելային խնդիրներ:

S. A. Ambartsumian

The theory of the transversal isotrop plate with the account of the couple stresses

Сформулированы исходные уравнения и соотношения моментной теории упругости в случае трансверсально упругого тела. Получены основные уравнения теории тонких трансверсально изотропных пластин с учетом моментных напряжений [1-9]. Рассмотрены некоторые модельные задачи.

1. Пусть трансверсально изотропное тело в каждой точке имеет плоскость изотропии, параллельную плоскости $x_1 O x_2$. Тогда, определяющие тело уравнения или закон малых упругих деформаций запишутся следующим образом [2, 5, 8, 9]:

“Силловые напряжения”

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda)\gamma_{11} + \lambda\gamma_{22} + \bar{\lambda}\gamma_{33} \\ \sigma_{22} &= (2\mu + \lambda)\gamma_{22} + \lambda\gamma_{11} + \bar{\lambda}\gamma_{33} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\bar{E}(1-\nu^2)}{E\Delta_1}\gamma_{33} + \bar{\lambda}(\gamma_{11} + \gamma_{22})$$

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha)\gamma_{12} + (\mu - \alpha)\gamma_{21} \quad (1.2)$$

$$\sigma_{21} = (\mu + \alpha)\gamma_{21} + (\mu - \alpha)\gamma_{12}$$

$$\sigma_{i3} = \left(\bar{\mu} + \bar{\alpha}\right)\gamma_{i3} + \left(\bar{\mu} - \bar{\alpha}\right)\gamma_{3i} \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$\sigma_{3i} = \left(\bar{\mu} + \bar{\alpha}\right)\gamma_{3i} + \left(\bar{\mu} - \bar{\alpha}\right)\gamma_{i3}$$

где

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E}{\Delta_1} \left[\frac{\nu}{E} + \frac{(\bar{\nu})^2}{E} \right] \quad (1.4)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\nu}(1+\nu)}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = (1+\nu) \left[\frac{1-\nu}{E} - 2 \frac{(\bar{\nu})^2}{E} \right]$$

E —модуль упругости в плоскости изотропии, ν —коэффициент Пуассона в

плоскости изотропии, \bar{E} — модуль упругости для направлений, перпендикулярных плоскости изотропии, $\bar{\nu}$ — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном ей, $\bar{\mu}$ — модуль сдвига в плоскостях, нормальных плоскости изотропии, μ — модуль сдвига в плоскости изотропии, $\alpha, \bar{\alpha}$ — новые упругие постоянные;

“моментные напряжения”

$$\mu_{11} = (\bar{2}\gamma + \bar{\beta})\chi_{11} + \bar{\beta}\chi_{22} + \beta\chi_{33} \quad (1.5)$$

$$\mu_{22} = \bar{\beta}\chi_{11} + (\bar{2}\gamma + \bar{\beta})\chi_{22} + \beta\chi_{33}$$

$$\mu_{33} = \beta\chi_{11} + \beta\chi_{22} + \bar{\gamma}_3\chi_{33}$$

$$\mu_{12} = (\bar{\gamma} + \bar{\epsilon})\chi_{12} + (\bar{\gamma} - \bar{\epsilon})\chi_{21} \quad (1.6)$$

$$\mu_{21} = (\bar{\gamma} + \bar{\epsilon})\chi_{21} + (\bar{\gamma} - \bar{\epsilon})\chi_{12}$$

$$\mu_{i3} = (\gamma + \epsilon)\chi_{i3} + (\gamma - \epsilon)\chi_{3i} \quad i = 1, 2 \quad (1.7)$$

$$\mu_{3i} = (\gamma + \epsilon)\chi_{3i} + (\gamma - \epsilon)\chi_{i3}$$

где $\alpha, \beta, \epsilon, \bar{\gamma}_3$ — новые упругие постоянные в плоскости изотропии, $\bar{\gamma}, \bar{\beta}, \bar{\epsilon}$ — новые упругие постоянные в плоскостях, нормальных плоскости изотропии.

Уравнения (1.1)–(1.7), решая относительно компонент несимметричного тензора деформации γ_{ji} и тензора изгиба-кручения χ_{ji} , примут вид:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\bar{\nu}}{E}\sigma_{33}$$

$$\gamma_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\sigma_{22} - \frac{\bar{\nu}}{E}\sigma_{33} \quad (1.8)$$

$$\gamma_{33} = -\frac{\bar{\nu}}{E}\sigma_{11} - \frac{\bar{\nu}}{E}\sigma_{22} - \frac{1}{E}\sigma_{33}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} \quad (1.9)$$

$$\gamma_{21} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}$$

$$\gamma_{i3} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}\sigma_{i3} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}\sigma_{3i} \quad i = 1, 2 \quad (1.10)$$

$$\gamma_{3i} = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}\sigma_{3i} - \frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}\sigma_{i3}$$

и далее

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{(2\bar{\gamma} + \bar{\beta})\bar{\gamma}_3 - \beta^2}{\Delta_2} \mu_{11} - \frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}_3 - \beta^2}{\Delta_2} \mu_{22} - \frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2} \mu_{33} \\ \chi_{22} &= \frac{(2\bar{\gamma} + \bar{\beta})\bar{\gamma}_3 - \beta^2}{\Delta_2} \mu_{22} - \frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}_3 - \beta^2}{\Delta_2} \mu_{11} - \frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2} \mu_{33} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \chi_{33} &= \frac{4\bar{\gamma}(\bar{\gamma} + \bar{\beta})}{\Delta_2} \mu_{33} - \frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2} \mu_{11} - \frac{2\beta\bar{\gamma}}{\Delta_2} \mu_{22} \\ \chi_{12} &= \frac{\bar{\gamma} + \bar{\epsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\epsilon}} \mu_{12} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\epsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\epsilon}} \mu_{21} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\chi_{21} = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\epsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\epsilon}} \mu_{21} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\epsilon}}{4\bar{\gamma}\bar{\epsilon}} \mu_{12}$$

$$\chi_{i3} = \frac{\gamma + \epsilon}{4\gamma\epsilon} \mu_{i3} - \frac{\gamma - \epsilon}{4\gamma\epsilon} \mu_{3i} \quad i = 1, 2 \quad (1.13)$$

$$\chi_{3i} = \frac{\gamma + \epsilon}{4\gamma\epsilon} \mu_{3i} - \frac{\gamma - \epsilon}{4\gamma\epsilon} \mu_{i3}$$

где

$$\Delta_2 = 4\bar{\gamma}[(\bar{\gamma} + \bar{\beta})\bar{\gamma}_3 - \beta^2] \quad (1.14)$$

Очевидно, к приведенным выше уравнениям должны быть присоединены уравнения равновесия, которые имеют вид [2]

$$\sigma_{j,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1.15)$$

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{j,i} + Y_i = J \ddot{\omega}_i \quad (1.16)$$

где u_i и ω_i — компоненты перемещения и поворота соответственно, X_i и Y_i — компоненты объемной силы и объемного момента соответственно, ρ — плотность, J — мера инерции при вращении, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема [10], ϵ_{ijk} — тензор Леви-Чивиты ($\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$, $\epsilon_{ijk} = 0$).

Далее, для компонент несимметричного тензора деформаций γ_{ij} и тензора изгиба-кручения χ_{ji} имеем [2]

$$\gamma_{ij} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \omega_k \quad (1.17)$$

$$\chi_{ji} = \omega_{j,i} \quad (1.18)$$

а также 18 условий совместности

$$\chi_{j,i,t} = \chi_{t,i,j} \quad (1.19)$$

$$\gamma_{t,i,h} - \gamma_{t,h,i} + \epsilon_{kih} \chi_{tk} - \epsilon_{kit} \chi_{hk} = 0 \quad (1.20)$$

Для полноты картины приведем также выражение удельной потенциальной энергии деформации трансверсально изотропного тела

$$\begin{aligned}
U = & \frac{2\mu + \lambda}{2} (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2) + \frac{\bar{E}(1-\nu^2)}{2E\Delta_1} \gamma_{33}^2 + \lambda\gamma_{11}\gamma_{22} + \bar{\lambda}\gamma_{33}(\gamma_{11} + \gamma_{22}) + \\
& + \frac{\mu + \alpha}{2} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2) + (\mu - \alpha)\gamma_{12}\gamma_{21} + \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{2} (\gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{32}^2) + \\
& + (\bar{\mu} - \bar{\alpha})(\gamma_{13}\gamma_{31} + \gamma_{23}\gamma_{32}) + \frac{2\bar{\gamma} + \bar{\beta}}{2} (\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2) + \frac{\bar{\gamma}_3}{2} \chi_{33}^2 + \bar{\beta}\chi_{11}\chi_{22} + \\
& + \beta\chi_{33}(\chi_{11} + \chi_{22}) + \frac{\bar{\gamma} + \bar{\epsilon}}{2} (\chi_{12}^2 + \chi_{21}^2) + (\bar{\gamma} - \bar{\epsilon})\chi_{12}\chi_{21} + \\
& + \frac{\gamma + \epsilon}{2} (\chi_{13}^2 + \chi_{23}^2 + \chi_{31}^2 + \chi_{32}^2) + (\gamma - \epsilon)(\chi_{13}\chi_{31} + \chi_{23}\chi_{32}) \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Очевидно, выполняя следующие процедуры:

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}}, \quad \mu_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \chi_{ji}} \quad (1.22)$$

получим приведенные выше уравнения состояния (1.1) - (1.3) и (1.5) - (1.7).

Таким образом, основные уравнения и соотношения упругости трансверсально изотропного тела с учетом моментных напряжений записаны. Теперь, в отличие от классической микрополярной теории упругости, где мы имеем шесть упругих постоянных $E, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, здесь фигурируют четырнадцать — $E, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \bar{E}, \bar{\nu}, \bar{\mu}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \bar{\epsilon}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}_3$, из которых $\bar{E}, \bar{\nu}, \bar{\mu} = G_{13} = G_{23} = G'$ имеются и в классическом трансверсально изотропном материале.

2. Рассмотрим тонкую трансверсально изотропную пластинку постоянной толщины h . Пусть срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью координат x_1, Ox_2 . Пусть также в каждой точке пластинки плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки. Пластинка загружена лишь поверхностными силами, нормально приложенными к плоскостям $x_3 = \pm \frac{h}{2}$.

При этом, очевидно, граничные (поверхностные) условия будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = Z^+, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0 \quad \text{при } x_3 = \frac{h}{2} \\
\sigma_{33} = -Z^-, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0 \quad \text{при } x_3 = -\frac{h}{2} \\
\mu_{33} = 0, \quad \mu_{31} = 0, \quad \mu_{32} = 0 \quad \text{при } x_3 = \pm \frac{h}{2}
\end{aligned} \quad (2.1)$$

В основу предлагаемой здесь теории пластин ставятся следующие гипотезы [5, 8].

а) Нормальные к срединной плоскости пластинки перемещения u_3 и повороты относительно координатных линий $u_3 - \omega_3$ не зависят от координаты x_3 ;

б) Касательные напряжения σ_{13} и σ_{23} по толщине пластинки меняются по заданному закону $f(x_3)$;

в) Силовые $\sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ и моментные $\mu_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$ напряжения пренебрежимо малы. При необходимости они могут быть определены из уравнений равновесия (1.15), (1.16).

Согласно гипотезе а) из (1.17) и (1.18) получим

$$\gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad u_3 = w(x_1, x_2) \quad (2.2)$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} = 0, \quad \omega_3 = \psi_3(x_1, x_2) \quad (2.3)$$

где $w(x_1, x_2)$ — искомое нормальное перемещение, $\psi_3(x_1, x_2)$ — искомый поворот вокруг координатных линий x_3 .

Согласно гипотезе б) для напряжений σ_{13} и σ_{23} запишем [5]

$$\sigma_{13} = f(x_3)\psi_1(x_1, x_2), \quad \sigma_{23} = f(x_3)\psi_2(x_1, x_2) \quad (2.4)$$

где $\psi_1(x_1, x_2)$ — произвольные искомые функции, характеризующие поперечные касательные напряжения, $f(x_3)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, в частности,

$$f(x_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - x_3^2 \right) \quad (2.5)$$

Из (1.10), согласно (1.17), (2.4) и предположения в), для компонент деформации γ_{13} и γ_{23} имеем:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_2 = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_1$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \omega_1 = \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_2$$

откуда для двух оставшихся компонент тензора поворота получим

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_2 \quad (2.6)$$

$$\omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_1 \quad (2.7)$$

Из (1.10), согласно (1.17), (2.4), предположения в) и представлений (2.6), (2.7), для компонент деформации γ_{31} и γ_{32} имеем

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_1 = -\frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_1$$

$$\gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_2 = -\frac{\bar{\mu} - \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} f(x_3)\psi_2$$

Разрешая эти уравнения относительно тангенциальных компонент перемещения u_1 и u_2 в предположении, что при $x_3=0$, $u_1 = u(x_1, x_2)$, $u_2 = v(x_1, x_2)$, получим

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{2\bar{\mu}} I_0(x_3)\psi_1 \quad (2.8)$$

$$u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{1}{2\bar{\mu}} I_0(x_3)\psi_2 \quad (2.9)$$

где $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ — искомые тангенциальные перемещения срединной

ПЛОСКОСТИ ПЛАСТИНКИ,

$$I_0(x_3) = \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3 = \frac{x_3}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (2.10)$$

Таким образом, мы получили двумерную задачу с шестью искомыми функциями $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$, $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$, $\psi_3(x_1, x_2)$, через которые с помощью формул (1.17) и (1.18) могут быть представлены все компоненты тензоров деформации и изгиба-кручения.

3. Подставляя значения перемещений u , и поворотов ω , соответственно из (2.2), (2.3), (2.6)-(2.9) в (1.17) и (1.18), получим значения компонент тензора деформаций и тензора изгиба-кручения. Подставляя эти значения в (1.1), (1.2) и (1.5), (1.7), для напряжений получим: силовые напряжения

$$\sigma_{11} = B \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) - x_3 B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{B}{2\bar{\mu}} I_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + v \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{22} = B \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + v \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - x_3 B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + \frac{B}{2\bar{\mu}} I_0 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + v \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) \quad (3.2)$$

которые получены с использованием гипотезы в)

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \eta' \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - x_3 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha \psi_3 + \frac{\mu + \alpha}{2\bar{\mu}} I_0 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \eta' \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.3)$$

$$\sigma_{21} = (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \eta' \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) - x_3 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha \psi_3 + \frac{\mu + \alpha}{2\bar{\mu}} I_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \eta' \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.4)$$

где

$$B = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \eta' = \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha} \quad (3.5)$$

а также, согласно гипотез б)

$$\sigma_{13} = f(x_3)\psi_1, \quad \sigma_{23} = f(x_3)\psi_2 \quad (3.6)$$

Моментные напряжения

$$\mu_{11} = 2\bar{\gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - f(x_3) \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} C \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \xi \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.7)$$

$$\mu_{22} = -2\bar{\gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + f(x_3) \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} C \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \xi \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.8)$$

которые получены с использованием гипотезы в)

$$\mu_{12} = -(\bar{\gamma} + \bar{\epsilon}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \bar{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + f(x_3) \bar{K}_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \bar{\eta} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \quad (3.9)$$

$$\mu_{21} = (\bar{\gamma} + \bar{\epsilon}) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \bar{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - f(x_3) \bar{K}_1 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \bar{\eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) \quad (3.10)$$

где

$$K_1 = \frac{(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})(\bar{\mu} + \bar{\alpha})}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}, \quad \bar{\eta} = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{K}_2}{\bar{K}_1} \quad (3.11)$$

$$C = \frac{\bar{\gamma}_3(2\bar{\gamma} + \bar{\beta}) - \beta^2}{\bar{\gamma}_3}, \quad \xi = \frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}_3 - \beta^2}{\bar{\gamma}_3(2\bar{\gamma} + \bar{\beta}) - \beta^2} = \frac{C_{12}}{C} \quad (3.12)$$

$$\bar{K}_2 = \frac{(\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon})(\bar{\mu} + \bar{\alpha})}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}}, \quad C_{12} = \frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}_3 - \beta^2}{\bar{\gamma}_3} \quad (3.13)$$

далее, согласно гипотезе в) из (1.13) имеем:

$$\chi_{13} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon} \mu_{23} \quad (3.14)$$

откуда для моментных напряжений получим

$$\mu_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad \mu_{23} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \quad (3.15)$$

4. Этим напряжениям соответствуют эквивалентные усилия и моменты, которые запишутся следующим образом [5, 8]:

От силовых напряжений внутренние усилия —

$$T_{11} = Bh \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \quad T_{22} = Bh \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \quad (4.1)$$

$$S_{12} = (\mu + \alpha)h \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \eta' \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - 2\alpha h \psi_3, \quad N_{13} = \frac{h^3}{12} \psi_1 \quad (4.2)$$

$$S_{21} = (\mu + \alpha)h \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \eta' \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + 2\alpha h \psi_3, \quad N_{23} = \frac{h^3}{12} \psi_2 \quad (4.3)$$

От силовых напряжений внутренние моменты —

$$M_{11} = -\frac{Bh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{Bh^5}{240\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \quad (4.4)$$

$$M_{22} = -\frac{Bh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + \frac{Bh^5}{240\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) \quad (4.5)$$

$$H_{12} = -2\bar{\mu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(\mu + \alpha)h^5}{240\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \eta' \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \quad (4.6)$$

$$H_{21} = -2\bar{\mu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{(\mu + \alpha)h^5}{240\bar{\mu}} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \eta' \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \quad (4.7)$$

От моментных напряжений внутренние крутящие (P_{ij}), изгибающие (R_{ij}) и планарные (Q_{ij}) моменты —

$$P_{11} = 2\bar{\gamma}h \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{h^3}{12} \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} C \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \xi \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \quad (4.8)$$

$$P_{22} = -2\gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{h^3}{12} \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} C \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \xi \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \quad (4.9)$$

$$R_{12} = -(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \bar{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{h^3}{12} K_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} - \bar{\eta} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \quad (4.10)$$

$$R_{21} = (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \bar{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - \frac{h^3}{12} K_1 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \bar{\eta} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) \quad (4.11)$$

$$Q_{13} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} h \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad Q_{23} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} h \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \quad (4.12)$$

Из (1.15) и (1.16) получим восемь осредненных по толщине пластинки уравнений движения, во внутренних усилиях и моментах

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -Z_2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{21}}{\partial x_2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_3 = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + \rho \frac{h^5}{240\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_3 = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2} + \rho \frac{h^5}{240\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial R_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_3 = Jh \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2} - \frac{Jh^3}{12} \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial R_{12}}{\partial x_1} - N_{13} + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_3 = -Jh \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{Jh^3}{12} \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{4\bar{\mu}\bar{\alpha}} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} + S_{12} - S_{21} = Jh \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

К этим уравнениям присоединяются граничные условия, некоторые из которых для края $x_1 = 0$ запишутся следующим образом [8]:

а) Свободный край -

$$T_{11} = 0, \quad S_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad M_{11} + R_{12} = 0, \quad H_{12} + P_{11} = 0, \quad N_{13} = 0 \quad (4.20)$$

б) Шарнирно опертый край -

$$T_{11} = 0, \quad S_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0, \quad M_{11} + R_{12} = 0, \quad H_{12} + P_{11} = 0, \quad w = 0 \quad (4.21)$$

в) Жестко заделанный край

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad w = 0 \quad (4.22)$$

Из предпоследних четырех уравнений движения, исключая $\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_3$ и

$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_3$, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (P_{11} - H_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (R_{21} - M_{22}) + N_{23} = \left(Jh + \rho \frac{h^3}{12} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2} - \frac{h^3}{48\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} J + \frac{h^2}{5} \rho \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial t^2} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (P_{22} + H_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (R_{12} + M_{11}) - N_{13} = - \left(Jh + \rho \frac{h^3}{12} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{h^3}{48\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} J + \frac{h^2}{5} \rho \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial t^2} \quad (4.24)$$

Таким образом, мы получили шесть дифференциальных уравнений движения пластинки во внутренних усилиях и моментах (4.13), (4.14), (4.19), (4.23), (4.24).

5. Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (4.1)-(4.12) в полученные выше шесть уравнений движения, окончательно получим следующую систему из шести дифференциальных уравнений, записанных в искомых функциях $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$, $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$, $\psi_3(x_1, x_2)$, через которые представлены все расчетные величины задачи:

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

$$B \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

$$\frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = - \frac{Z_2}{h} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.3)$$

$$\bar{A} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta w - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\bar{A}_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \bar{A}_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + \bar{A}_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{h^2}{12} \psi_1 = \left(J + \frac{h^2}{12} \rho \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} J + \frac{h^2}{5} \rho \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (5.4)$$

$$\bar{A} \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta w - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\bar{A}_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + \bar{A}_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} + \bar{A}_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{h^2}{12} \psi_2 = \left(J + \frac{h^2}{12} \rho \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial t^2} - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} J + \frac{h^2}{5} \rho \right) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{2\gamma\epsilon}{\gamma + \epsilon} \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_2^2} \right) - 2\alpha \psi_3 = \frac{J}{2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{Bh^2}{12} + \bar{\gamma} + \bar{\epsilon}, \quad \bar{A}_1 = \frac{Bh^2}{5} + \frac{(\bar{\mu} + \bar{\alpha})(\bar{\gamma} + \bar{\epsilon})}{\bar{\alpha}} \\ \bar{A}_2 &= \frac{(\mu + \alpha)h^2}{5} + \frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} C, \quad \bar{A}_3 = (B_{12} + \mu - \alpha) \frac{h^2}{5} - \frac{(\bar{\mu} + \bar{\alpha})(C_{12} + \bar{\gamma} - \bar{\epsilon})}{\bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Рассматривая эту систему уравнений, замечаем, что уравнения (5.1), (5.2) и (5.6) совместно с соответствующими граничными условиями составляют замкнутую систему уравнений плоской задачи трансверсально изотропной пластинки с искомыми u, v, ψ_3 . Остальные же три уравнения (5.3), (5.4), (5.5) с соответствующими граничными условиями представляют задачу поперечного изгиба пластинки с искомыми w, ψ_1, ψ_2 .

6. Введем обобщающую упругую постоянную \bar{l} , которая имеет размерность длины [8,11]

$$\bar{l}^2 = (\bar{\mu} + \bar{\alpha})(\bar{\gamma} + \bar{\epsilon}) / 4\bar{\mu}\bar{\alpha} \quad (6.1)$$

Этот коэффициент содержит лишь трансверсальные упругие постоянные.

Согласно (6.1), для коэффициентов \bar{A}, \bar{A}_1 имеем

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{Bh^2}{12} \left(1 + 48 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \frac{\bar{l}^2}{h^2} \right), \quad \bar{A}_1 = \frac{Bh^2}{5} \left(1 + 20 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{l}^2}{h^2} \right) \\ \bar{A}_2 &= \frac{(\mu + \alpha)h^2}{5} \left[1 + \frac{20\bar{\mu}C}{(\mu + \alpha)(\bar{\gamma} + \bar{\epsilon})} \frac{\bar{l}^2}{h^2} \right] \\ \bar{A}_3 &= \frac{(B_{12} + \mu - \alpha)h^2}{5} \left[1 - \frac{20\bar{\mu}(C_{12} + \bar{\gamma} - \bar{\epsilon})}{(\bar{\gamma} + \bar{\epsilon})(B_{12} + \mu - \alpha)} \frac{\bar{l}^2}{h^2} \right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

7. Для иллюстрации рассмотрим три модельных примера.

а) Изгиб шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки $a \times b$, под действием нормально приложенной синусоидальной нагрузки. Нагрузка распределена по закону

$$z_2 = q \cdot \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \quad (7.1)$$

Система исходных дифференциальных уравнений изгиба пластинки, согласно (6.3)-(6.5) и (7.1), имеет вид

$$\frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = -q \cdot \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \quad (7.2)$$

$$\bar{A} \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta w - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\bar{A}_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \bar{A}_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + \bar{A}_3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{h^2}{12} \psi_1 = 0$$

$$\bar{A} \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta w - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\bar{A}_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + \bar{A}_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} + \bar{A}_3 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{h^2}{12} \psi_2 = 0$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad w = 0, M_{11} + R_{12} = 0, \psi_2 = 0$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad w = 0, M_{22} + R_{21} = 0, \psi_1 = 0 \quad (7.3)$$

Полагая

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b}, \quad \psi_1 = C_2 \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{b} \quad (7.4)$$

$$\psi_2 = C_3 \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi x_2}{b}$$

удовлетворим граничным условиям (7.3), а из системы уравнений (7.2), с учетом (6.1), а также равенства $\bar{A}_1 = \bar{A}_2 + \bar{A}_3$, для коэффициентов C_i получим

$$C_1 = \frac{q}{\bar{A}h} \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \left[1 + \frac{\pi^2 B h^2 (a^2 + b^2)}{20\bar{\mu} a^2 b^2} \left(1 + 20 \frac{\bar{\mu} \bar{l}^2}{B h^2} \right) \right] \quad (7.5)$$

$$C_2 = \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{12qb}{\pi h^3}, \quad C_3 = \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{12qa}{\pi h^3}$$

Рассматривая значения C_i , замечаем, что, как и следовало ожидать, C_2 и C_3 имеют классическое представление [5,8], а C_1 существенно отличается от классики. Здесь вместо классической жесткости $Bh^3/12$ имеем новое представление

$$\bar{A}h = \frac{Bh^3}{12} \left(1 + 48 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \frac{\bar{l}^2}{h^2} \right) \quad (7.6)$$

которое содержит поправку к классической жесткости, с новыми упругими постоянными трансверсального происхождения.

Подставляя значения C_i в (7.4) и далее в (3.1)-(3.10) и (4.1)-(4.12), получим соответствующие формулы для определения всех расчетных величин рассмотренной задачи.

б) Поперечные колебания пластинки. Одномерная задача. Исходная система дифференциальных уравнений колебаний пластинки в общем случае одномерной задачи согласно (5.1)-(5.6) имеет вид

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.7)$$

$$(\mu + \alpha) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2\alpha \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (7.8)$$

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial x_1} + 2 \frac{\gamma \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x_1^2} - 2\alpha \psi_3 = \frac{J}{2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} \quad (7.9)$$

$$\frac{h^2}{12} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7.10)$$

$$\bar{A} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \bar{A}_1 + \frac{h^3}{12} \psi_1 = \left(J + \frac{h^2}{12} \rho \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2} - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} J + \frac{h^2}{5} \rho \right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (7.11)$$

$$\frac{h^2}{48\bar{\mu}} A_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} - \frac{h^2}{12} \psi_2 = \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \left(\frac{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} J + \frac{h^2}{5} \rho \right) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (7.12)$$

Эта система с точностью до обозначений досконально изучена в [8]. Здесь мы рассмотрим лишь поперечные колебания пластинки без учета инерций вращения и поворота. Задача эта описывается системой уравнений (7.10) и (7.11), (7.12) без правых частей.

Пусть по краям пластинки шириной a имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad w = 0, M_{11} + R_{12} = 0, H_{12} + P_{11} = 0 \quad (7.13)$$

Решение ищем в форме ($\Psi_2=0$)

$$w = C_1 \sin \lambda_m x_1 \cos \omega_m t, \quad \psi_1 = C_2 \cos \lambda_m x_1 \cos \omega_m t \quad (7.14)$$

где $\lambda_m = m\pi/a$, m — целое число, ω_m — искомые частоты колебаний, соответствующие функциям $w(x_1, t)$ и $\psi_1(x_1, t)$. Подставляя значения w и ψ_1 из (7.14) в уравнения (7.10) и (7.11) (однородное), получим систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_i . Приравняв нулю определитель этой однородной системы для квадрата частоты колебаний пластинки, с учетом (6.1), получим

$$\omega_m^2 = \frac{Bh^2}{12} \lambda_m^4 \left(1 + 48 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \frac{\bar{I}^2}{h^2} \right) \left[1 + \frac{Bh^2}{20\bar{\mu}} \left(1 + 20 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{I}^2}{h^2} \right) \lambda_m^2 \right] \rho \quad (7.15)$$

Как и в предыдущей задаче, поправка к классической теории [12] существенным образом зависит от новых постоянных упругости.

в) **Задача устойчивости пластинки.** Рассмотрим модельную задачу об устойчивости длинной прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по длинным сторонам $x_1 = 0, x_1 = a$, сжатой в своей плоскости (по этим же сторонам) равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p . Будем полагать, что изогнутая поверхность пластинки — цилиндрическая [5,8,12]. В этом случае система исходных дифференциальных уравнений,

согласно (5.1)-(5.6), а также известных положений классической теории устойчивости [5, 12], переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{12} \frac{d\psi_1}{dx_1} + T_{11}^0 \frac{d^2 w}{dx_1^2} &= 0 \\ \bar{A} \frac{d^3 w}{dx_1^3} - \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \bar{A}_1 \frac{d^2 \psi_1}{dx_1^2} + \frac{h^2}{12} \psi_1 &= 0 \\ \frac{h^2}{48\bar{\mu}} \bar{A}_2 \frac{d^2 \psi_2}{dx_1^2} - \frac{h^2}{12} \psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

где T_{11}^0 — внутреннее тангенциальное усилие начального плоского напряженного состояния пластинки.

К системе уравнений (7.16) присоединим граничные условия шарнирного опирания

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad w = 0, M_{11} + R_{12} = 0, H_{12} + P_{11} = 0 \quad (7.17)$$

Теперь, очевидно, что в рассматриваемом случае $\psi_2 = 0$, а в предположении, что имеет место начальное плоское напряженное состояние [5,8,12], получим $T_{11}^0 = -p$.

Решение системы (7.16), теперь уже состоящую из двух уравнений, ищем в форме

$$w = C_1 \sin \frac{m\pi x_1}{a}, \quad \psi_1 = C_2 \cos \frac{m\pi x_2}{a} \quad (7.18)$$

где C_i — произвольные постоянные, m — целое число.

Подставляя значения w и ψ_1 из (7.18) в систему (7.16), получим систему алгебраических уравнений относительно C_i . Приравняв нулю определитель этой однородной системы, с учетом (6.1) для критической силы получим

$$P_m^* = \frac{Bh^3 m^2 \pi^2}{12 a^2} \frac{1 + 48 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{\alpha}} \frac{\bar{l}^2}{h^2}}{1 + \frac{Bh^2 m^2 \pi^2}{20\bar{\mu} a^2} \left(1 + 20 \frac{\bar{\mu}}{B} \frac{\bar{l}^2}{h^2} \right)} \quad (7.19)$$

Здесь множителем этой формулы является значение критической силы, найденное по классической теории [12]. Как и следовало ожидать, и в этом случае имеем поправочные члены, существенно зависящие от новых постоянных упругости.

Рассматривая (7.5), (7.6), (7.15), (7.19), замечаем, что все поправки существенным образом зависят от отношения \bar{l}/h . Новое обобщающее упругое постоянное \bar{l} является малой величиной, и естественно, поправки от учета моментных напряжений могут быть заменены лишь при малых

абсолютных значениях толщины пластинки h .

Рассматривая формулы (7.15) и (7.19), замечаем, что в числителях этих формул стоят поправки от учета моментных напряжений. Что же касается знаменателей, то здесь мы имеем как поправку от учета моментных напряжений, так и от специфичного учета явлений поперечного сдвига. Последнее в силу произвольности $\bar{\mu}$, для трансверсально изотропного материала, поправку от учета поперечных сдвигов может сделать значительным, тем более при определенных значениях m и h/a .

Благодарю М.В. Белубекяна за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Hermann, 1909. 226p.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
3. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений. //Механика. Переводн. сб. переводов иностр. статей. 1964. №4. С.115-128.
4. Савин Г.Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд. Киевского ун-та, 1965. 162 с.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
6. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Ленинград: Изд. Ленинградского ун-та, 1978. 182 с.
7. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. Московского ун-та, 1999. 327 с.
8. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
9. Jones R.M. Mechanics of composite materials. Ann Arbor: Taylors Francis. 1999. 519 p.
10. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости //ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
11. Кириллов Ю.В., Постнов А.А., Тюленев А.И. Исследования по теории пластин и оболочек моментной теории упругости. Исследования по теории пластин и оболочек // Сб.: Казань: Изд. Казанск.ун-та, 1990, вып.20. С. 18-43.
12. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеориздат. 1957. 463 с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
18.10.2000