

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ТЕЛА С
КРУГЛОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Асанян Д. Д

Դ. Զ. Հասանյան

Կլոր դիսկան ճարավ կտոր առ կտոր համասեռ ֆերոմագնիտական տարածության լարվածա-
դեֆորմացիոն վիճակը

Մագնիսատաճվածության գծային հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրված է երկու կտոր առ կտոր համասեռ ֆերոմագնիտական տարածության լարվածա դեֆորմացիոն վիճակը, երբ նրանց բաժանման մակերևույթին առկա է կլոր դիսկան ճար: Ենթադրվում է որ համակարգը տեղադրված է համասեռ մագնիսական դաշտում, որի լարվածության վեկտորը ուղղահայաց է երկու տարածությունների բաժանման մակերևույթին: Ուսումնասիրված է մագնիսական դաշտի, անհամասեռության և մագնիսական հատկությունների ազդեցությունը լարումների և լարումների կոնցենտրացիայի գործակցի վրա: Ցույց է տրված որ նշված պարամետրերը կարող են ունենալ ինչպես քանակական այնպես էլ որակական ազդեցություն:

D. J. Hasanyan

Stress-deformation state piecewise homogeneous ferromagnetic space with a penny shaped crack

Исходя из линеаризированных уравнений теории магнитоупругости, исследуется напряженно-деформированное состояние магнитоупругого пространства с круглой дискообразной трещиной, находящейся на поверхности раздела двух различных однородных полупространств. Предполагается, что система помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное к поверхности раздела двух полупространств. Исследовано влияние неоднородности среды, магнитных свойств полупространств и магнитного поля на упругие напряжения и коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений. Показано, что вышеперечисленные параметры могут иметь как качественное, так и количественное влияние на магнитоупругие напряжения.

Введение. В последнее время резко возросло число работ, посвященных проблеме разрушения упругих тел с трещинами в электромагнитных полях [1-5]. Оказывается, что электромагнитные поля могут существенно повлиять на напряженно-деформированное состояние (НДС) около трещины. Они могут как остановить процесс разрушения [1,5], так и стать его причиной [1,2-4]. Рассматривается задача о осесимметричном напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного ферромагнитного пространства с круглой дискообразной трещиной в однородном магнитном поле. Предполагается, что трещина находится на поверхности раздела двух различных однородных упругих полупространств. Задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций на конечном интервале. Неизвестные функции определяются аналитически, что позволяет получить формулы для магнитоупругих напряжений и коэффициента интенсивности магнитоупругих напряжений. На основе полученных формул исследуется влияние различных физико-механических параметров задачи и

магнитного поля на напряженно-деформированное состояние пространства около трещины.

1. Основные уравнения и граничные условия. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению объемных и поверхностных сил. Под действием этих сил в среде возникают деформации, возбуждающие добавочное (индуцированное) магнитное поле.

Рассмотрим задачу определения НДС кусочка однородного ферромагнитного пространства, состоящего из двух различных магнитомягких ферромагнитных полупространств, на границе раздела которых находится дисковидная трещина радиуса a . Обозначим через (r, θ, z) цилиндрические координаты точки в пространстве, где ось z параллельна оси симметрии тела. Через (f_r, f_θ, f_z) обозначим компоненты вектора f в цилиндрической системе координат. Далее будем предполагать, что тело находится в однородном магнитном поле $B_0 = (0, 0, B_0)$, $B_0 = \text{const}$. На поверхности трещины действуют вертикальные равномерно распределенные и противоположно направленные механические силы $P_m = (0, 0, P)$, $P = \text{const}$, обеспечивающие деформацию нормального разрыва, исключаящие контакт берегов трещины. Предположим также, что деформация тела осесимметрична, т.е. для всех искомых вектор-функций f компонента f_θ равна нулю, а компоненты f_r и f_z не зависят от координаты θ . НДС среды определим из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела (предложенной в [6]). Как известно, нетривиальные компоненты магнитоупругих напряжений t_{km} и максвелловских напряжений t_{km}^M имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} t_{rr} &= 2\mu \left\{ (1-\nu)u_{r,r} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + u_{z,z} \right) \right\} / (1-2\nu) \\ t_{rz} &= t_{rz} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r}) + \mu_0 M_{0z} m_r / \chi \\ t_{\theta\theta} &= 2\mu \left\{ (1-\nu) \frac{u_r}{r} + \nu(u_{r,r} + u_{z,z}) \right\} / (1-2\nu) \\ t_{zz} &= 2\mu \left\{ (1-\nu)u_{z,z} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + u_{r,r} \right) \right\} / (1-2\nu) + M_{0z}^2 / \chi + 2\mu_0 M_{0z} m_z / \chi \\ t_{rz}^M &= t_{rz}^M = \mu_0 \mu_r H_{0z} h_r, \quad t_{rr}^M = t_{\theta\theta}^M = -B_{0z}^2 / 2\mu_0 - B_{0z} h_z \\ t_{zz}^M &= \mu_0 (1+2\chi) H_{0z} [0.5 H_{0z} + h_z], \quad m = \chi h, \quad b = \mu_0 \mu, \quad h h \end{aligned} \quad (1.1)$$

В силу вышепринятых предположений, линеаризованная система уравнений возмущенного состояния магнитомягкого ферромагнитного тела, находящегося в магнитном поле B_0 , в цилиндрической системе координат примет следующий вид:

$$t_{rr}^{(j)} + \frac{1}{r} t_{rr}^{(j)} + t_{zz,z}^{(j)} - \frac{1}{r} t_{\theta\theta}^{(j)} + \mu_0 M_{0z}^{(j)} h_{r,z}^{(j)} = 0 \quad (1.2)$$

$$t_{rz,r}^{(j)} + \frac{1}{r} t_{rz}^{(j)} + t_{zz,r}^{(j)} + \mu_0 M_{0z}^{(j)} h_{z,r}^{(j)} = 0 \quad (1.3)$$

$$h_{r,z}^{(j)} - h_{z,r}^{(j)} = 0, \quad \frac{1}{r} (r h_r^{(j)})_r + h_{z,z}^{(j)} = 0 \quad (j=1,2) \quad (1.4)$$

где $M_{0z}^j = (\mu_j - 1) B_{0z} / \mu_j$ — компонента вектора намагниченности в невозмущенном состоянии, а индексы $j=1$ и $j=2$ означают принадлежность к областям $z > 0$ и $z < 0$, соответственно. Заметим, что (1.2), (1.3) являются уравнениями равновесия для магнитоупругих сред, а (1.4) является уравнением Максвелла. Решение системы (1.2)-(1.4) ищется в классе функций, стремящихся к нулю, при $|z| \rightarrow \infty$.

Граничные условия для поставленной задачи имеют вид ([3-6]):

$$\begin{cases} u_r^{(1)} = u_r^{(2)}; u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \\ h_r^{(1)} - h_r^{(2)} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\mu_{r1} \mu_{r2}} u_{z,r}^{(1)} \end{cases} \quad \text{при } z = 0, r > a \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \mu_{r1} h_z^{(1)} = \mu_{r2} h_z^{(2)}, t_{rz}^{(1)} + t_{rz}^{M(1)} = t_{rz}^{(2)} + t_{rz}^{M(2)} \\ t_{zz}^{(1)} + t_{zz}^{M(1)} = t_{zz}^{(2)} + t_{zz}^{M(2)} \end{cases} \quad \text{при } z = 0, r < \infty \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} h_r^{(1)} - h_r^{(2)} = \frac{\chi_1}{\mu_{r1}} u_{z,r}^{(1)} - \frac{\chi_2}{\mu_{r2}} u_{z,r}^{(2)}, t_{rz}^{(1)} / \mu_1 = -\frac{\chi_1 b_c^2}{\mu_{r1}} u_{z,r}^{(1)} \\ t_{zz}^{(1)} / \mu_1 = -P_0 - \frac{\chi_1 b_c^2}{2\mu_{r1}^2} (1 + 2\mu_{r1} h_z^{(1)}) \end{cases} \quad \text{при } z = 0, r < a \quad (1.7)$$

Здесь: $\nu_j, \mu_j, \mu_{rj}, \chi_j = \mu_j - 1, (j=1,2)$ — упругие и магнитные постоянные j -ого полупространства; δ_{ij} — символ Кронекера; $b_c^2 = B_0^2 / \mu_0 \mu_1$, а $P_0 = P / \mu_1$ — компонента приведенной механической силы, действующей на берег трещины.

Как видно из (1.5)-(1.7), упругие перемещения u_r, u_z и компоненты возмущенного магнитного поля h_r, h_z связаны также граничными условиями.

Решения уравнений (1.2)-(1.4), с учетом условий на бесконечности, имеют вид:

$$u_r^{(j)}(r, z) = \int_0^\infty (-1)^{j+1} \{ \alpha A^{(j)}(\alpha) - (-1)^{j+1} (3 - 4\nu_j) B^{(j)}(\alpha) + \alpha z B^{(j)}(\alpha) + \\ + 2(1 - 2\nu_j) \frac{\chi_j B_0^2}{\mu_0 \mu_j \mu_{rj}} \alpha a^{(j)}(\alpha) \} J_1(\alpha r) \exp[(-1)^j \alpha z] d\alpha \quad (1.8)$$

$$u_z^{(j)}(r, z) = \int_0^\infty \alpha [A^{(j)}(\alpha) + \alpha z B^{(j)}(\alpha)] J_0(\alpha r) \exp[(-1)^j \alpha z] d\alpha \quad (1.9)$$

$$\phi^{(j)}(r, z) = \int_0^{\infty} \alpha a^{(j)}(\alpha) J_0(\alpha r) \exp[(-1)^j \alpha z] d\alpha, \quad (j = 1, 2) \quad (1.10)$$

где $A^{(j)}(\alpha)$, $B^{(j)}(\alpha)$ и $a^{(j)}(\alpha)$ ($j = 1, 2$) — неизвестные функции, которые далее определяются из граничных условий (1.5)-(1.7), а $J_0(\alpha r)$ и $J_1(\alpha r)$ — функции Бесселя. Таким образом, определение НДС ферромагнитного пространства с дискообразной трещиной сводится к нахождению функций $A^{(j)}(\alpha)$, $B^{(j)}(\alpha)$ и $a^{(j)}(\alpha)$ ($j = 1, 2$). Подставляя (1.8) - (1.10) в (1.1), определим магнитоупругие напряжения в каждом полупространстве. В частности, для $t_{zz}^{(1)}(r, z)$ и $t_{zz}^{M(1)}(r, z)$ имеем:

$$t_{zz}^{(1)}(r, z)/\mu_1 = \frac{\chi_1}{\mu_{r1}} b_c^2 + \int_0^{\infty} \alpha \{-2\alpha A_1(\alpha) - 2[1 - 2\nu_1 - \alpha z] B_1(\alpha) - c_1 \alpha a_1(\alpha)\} \exp[-\alpha z] J_0(\alpha r) d\alpha \quad (1.11)$$

$$t_{zz}^{M(1)}(r, z)/\mu_1 = \frac{1 + 2\chi_1}{2\mu_{r1}^2} b_c^2 \{1 - 2\mu_{r1} \int_0^{\infty} \alpha^2 a_1(\alpha) J_0(\alpha r) \exp[-\alpha z] dz\}$$

2. Решение задачи. Введем функции скачка смещения и индуцированного магнитного поля в области трещины

$$u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \{y_1(\alpha) - (3 - 4\nu_1)y_2(\alpha) + c_1 y_3(\alpha) + y_4(\alpha) - (3 - 4\nu_2)y_5(\alpha) + c_2 y_6(\alpha)\} J_1(\alpha r) d\alpha = \int_0^{\infty} W_1(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} 0 & r > a \\ \Delta u_r & r < a \end{cases}$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) - u_z^{(2)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \{y_1(\alpha) - y_2(\alpha)\} J_0(\alpha r) d\alpha = \int_0^{\infty} W_2(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} 0 & r > a \\ \Delta u_z & r < a \end{cases}$$

$$h_r^{(1)}(r, 0) - h_r^{(2)}(r, 0) + \chi_r u_{z,r}^{(1)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \{-\chi_r y_1(\alpha) - y_3(\alpha) + y_6(\alpha)\} \alpha J_1(\alpha r) d\alpha = \int_0^{\infty} \alpha W_3(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = \begin{cases} 0 & r > a \\ \Delta h_r & r < a \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь

$$y_1(\alpha) = \alpha A^{(1)}(\alpha); \quad y_2(\alpha) = B^{(1)}(\alpha); \quad y_3(\alpha) = \alpha a^{(1)}(\alpha); \quad y_4(\alpha) = \alpha A^{(2)}(\alpha); \\ y_5(\alpha) = B^{(2)}(\alpha); \quad y_6(\alpha) = \alpha a^{(2)}(\alpha)$$

Из (1.5)-(1.6), с учетом (2.1), получим следующее алгебраическое уравнение:

$$\hat{A} \bar{Y} = \bar{\Phi} \quad (2.2)$$

В (2.2) приняты следующие обозначения:

$$\lambda = 0.5[(1 + 4\chi_1)/\mu_{r1}^2 - (1 + 4\chi_2)/\mu_{r2}^2]; \quad \delta(\alpha) - \text{функция Дирака;}$$

$$c_j = 2(1 - 2\nu_j)\chi_j b_c^2 / \mu_{rj}, \quad c_{2+j} = -0.5[c_j + (1 + 2\chi_j) / \mu_{rj}],$$

$$\chi_r = 1/\mu_{r1} - 1/\mu_{r2}, \quad \mu_r = \mu_{r1} / \mu_{r2}$$

$$c_{4+j} = (-1)^j [1 + (3 - 4\nu_j)\chi_j / \mu_{rj}] b_c^2 / 2, \quad \mu = \mu_2 / \mu_1, \quad (j = 1, 2).$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3+4\nu_1 & c_1 & 1 & 3-4\nu_2 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\chi_r & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-2\nu_1 & c_3 & -\mu & -\mu(1-2\nu_2) & c_4 \\ -1 & 2(1-\nu_1) & c_5 & \mu & 2\mu(1-\nu_2) & c_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mu_r \end{pmatrix}; \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} W_1(\alpha) \\ W_2(\alpha) \\ W_3(\alpha) \\ \lambda\delta(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1(\alpha) \\ y_2(\alpha) \\ y_3(\alpha) \\ y_4(\alpha) \\ y_5(\alpha) \\ y_6(\alpha) \end{pmatrix}$$

Обращая равенство (2.2), получим

$$y_i(\alpha) = \sum_{k=1}^3 b_{ik} W_k(\alpha) + \lambda b_{i4} \delta(\alpha) \quad (2.3)$$

где b_{ik} -элементы обратной матрицы к \hat{A} . Подставляя (2.3) в граничные условия (1.5), (1.7) и учитывая (2.1), получим следующую систему парных интегральных уравнений относительно неизвестных $W_k(\alpha)$, ($k = 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} W_1(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = 0 \\ \int_0^{\infty} W_2(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = 0 & \text{при } r > a \\ \int_0^{\infty} \alpha W_3(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \beta_{ki} \int_0^{\infty} \alpha W_i(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha = 0, & (k = 1, 2) \quad r < a \\ \sum_{i=1}^3 \beta_{3i} \int_0^{\infty} \alpha W_i(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = Q_0 = -P_0 + \chi_1(2\chi_1 - 1)b_c^2 / \mu_{r1} + \beta_{34}\lambda / 2 \end{cases} \quad (2.5)$$

где

$$\beta_{1k} = -(2 + \chi_1 b_c^2 / \mu_{r1}) b_{1k} + 4(1 - \nu_1) b_{2k} + c_5^* b_{3k}; \quad c_5^* = -(3 - 4\nu_1)\chi_1 b_c^2 / \mu_{r1}$$

$$\beta_{2k} = -\chi_1 b_{1k} / \mu_{r1} + b_{3k} + \chi_r b_{4k} / \mu_r - b_{6k};$$

$$\beta_{3k} = -2b_{1k} + 2(1 - 2\nu_1) b_{2k} - (c_1 - \chi_1^2 b_c^2 / \mu_{r1}) b_{3k}; \quad (k = 1, 2, 3)$$

Введем вспомогательные функции $q(t)$, $p(t)$ с помощью соотношений

$$W_1(\alpha) = \int_0^a q(t) [\cos \alpha t - \cos \alpha a] dt; \quad W_2(\alpha) = \int_0^a p(t) \sin \alpha t dt$$

$$W_3(\alpha) = \tau \cdot W_2(\alpha) \quad (2.6)$$

где $\tau = (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) / (\beta_{21}\beta_{13} - \beta_{11}\beta_{23})$. Нетрудно убедиться, что система уравнений (2.4) удовлетворяется тождественно, а система уравнений (2.5) эквивалентна системе двух интегральных уравнений относительно $p(t)$ и $q(t)$

$$\begin{cases} f_{11} \int_0^r \frac{q(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} + f_{12} \int_r^a \frac{p(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = c^*, & 0 < r < a \\ f_{21} \left[\int_0^a q(t) dt - \int_r^a \frac{q(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] + f_{22} \int_0^r \frac{tp(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{Q_0 r^2}{2} + f_{21} \int_0^a q(t) dt \left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] \end{cases} \quad (2.7)$$

где c^* — некоторая постоянная, значение которой будет определено ниже. Отметим, что при выводе (2.7) использовались известные значения разрывных интегралов [1]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0(\xi r) \sin \xi \eta d\xi &= \begin{cases} 0, & \eta < r \\ (\eta^2 - r^2)^{-1/2}, & \eta > r \end{cases} \\ \int_0^\infty J_0(\xi r) \cos \xi \eta d\xi &= \begin{cases} 0, & \eta > r \\ (\eta^2 - r^2)^{-1/2}, & \eta < r \end{cases} \\ \int_0^\infty J_1(\xi r) \cos \xi \eta d\xi &= \begin{cases} 1/r, & \eta < r \\ [1 - \eta(\eta^2 - r^2)^{-1/2}] / r, & \eta > r \end{cases} \\ \int_0^\infty J_1(\xi r) \sin \xi \eta d\xi &= \begin{cases} 0, & \eta > r \\ \eta(\eta^2 - r^2)^{-1/2} / r, & \eta < r \end{cases} \end{aligned}$$

Применяя оператор $\frac{d}{d\tau} \int_r^a (\dots) (r^2 - \tau^2)^{-1/2} d\tau$ к (2.7) и изменяя порядок интегрирования, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} f_{12} p_0(\tau) + \frac{f_{11}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q_0(\eta) d\eta}{\tau - \eta} = \frac{2c^* \tau}{\pi} \\ f_{21} q_0(\tau) - \frac{f_{22}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p_0(\eta) d\eta}{\tau - \eta} = \frac{Q_0(a^2 - 2\tau^2)}{\pi} \end{cases} \quad \text{при } -a < \tau < a \quad (2.8)$$

В (2.6)-(2.8) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} p_0(\tau) &= p(\tau) \sqrt{a^2 - \tau^2}, \quad q_0(\tau) = q(\tau) \sqrt{a^2 - \tau^2}, \quad f_{11} = \beta_{11}, \quad f_{21} = \beta_{31}, \\ f_{22} &= \beta_{32} + \tau \beta_{33}, \quad f_{12} = \beta_{12} + \tau \beta_{13}. \end{aligned}$$

При выводе (2.8) учтены свойства $p(-\tau) = -p(\tau)$, $q(-\tau) = q(\tau)$. Определим величины $g_1^2 = f_{11} f_{21} / f_{12} f_{22}$ и $g^2 = f_{11} f_{22} / f_{12} f_{21}$. При условии $g > 1$, система уравнений (2.8) запишется в виде

$$f_0(\tau) - g \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f_0(\eta) d\eta}{\eta - \tau} = \frac{2c^* \tau}{\pi} + \frac{i Q_0 g_1 (a^2 - 2\tau^2)}{\pi} \quad (2.9)$$

где $f_0(\tau) = p_0(\tau) + ig_1 q_0(\tau)$. Решение интегрального уравнения (2.9) хорошо известно ([7]). Заметим что, интегральные уравнения типа (2.8) встречаются также при определении НДС около трещины для пьезоэлектрических и магнитоупругих сред ([1,7]). Отметим, что условие $g > 1$ эквивалентно условию $b_c^2 < b_{c*}^2$. В таб. 1 приведены значения $10^5 b_c^2$, в зависимости от параметра μ при различных значениях ν_j , μ_j ($j = 1, 2$).

Таблица 1

| μ | $\nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.35,$ $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^4$ | $\nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.35,$ $\mu_{r1} = 10^4, \mu_{r2} = 10^5$ | $\nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.45,$ $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$ |
|-------|---|---|---|
| 0.7 | 11.41 | 6.48 | 1.01 |
| 1.4 | 16.02 | 7.83 | 1.21 |
| 2.1 | 19.08 | 8.22 | 2.78 |
| 2.8 | 21.03 | 8.43 | 2.05 |
| 3.5 | 22.25 | 8.62 | 2.26 |

Применяя известные методы решения интегрального уравнения (2.9) ([1,7]) получим

$$p_0(\tau) = \frac{2pg_1 e^{ka}}{\pi g_{22}(g+1)} \left[\tau \cos\left(k \ln \frac{a-\tau}{a+\tau}\right) - ka \sin\left(k \ln \frac{a-\tau}{a+\tau}\right) \right] \quad (2.10)$$

$$q_0(\tau) = -\frac{2pe^{ka}}{\pi g_{22}(g+1)} \left[ka \cos\left(k \ln \frac{a-\tau}{a+\tau}\right) + \tau \sin\left(k \ln \frac{a-\tau}{a+\tau}\right) \right] \quad (2.11)$$

Для задачи определения НДС около трещины в пьезоэлектрической среде (рассмотренной в [1]), условие $g > 1$ выполняется автоматически. Условие $g > 1$ накладывает ограничение на магнитное поле, из которого следует, что функции (2.10)-(2.11) удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.8) лишь при условии $b_c^2 < b_{c*}^2$. Решение интегрального уравнения (2.9) в общем случае приведено в работе [7]. Заметим, что

имеет место равенство $\int_0^a q(t) dt = 0$. Отсюда следует, что скачки смещений на берегах трещины (определенные по формулам (2.1)) могут быть представлены в виде

$$\Delta u_r = \int_r^a \frac{p(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad \Delta u_z = -\frac{1}{r} \int_r^a \frac{tq(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad 0 \leq r < a \quad (2.12)$$

Суммарные магнитоупругие напряжения

$t_{ij}^{(m)}(r, z)/\mu_m = t_{ij}^{(m)}(r, z)/\mu_m + t_{ij}^{(M)}(r, z)/\mu_m$, с помощью формул (1.1) могут быть выражены через функции $p(t)$ и $q(t)$. Например,

$$t_{zz}^{(1)}(r, z)/\mu_1 = \frac{1+4\chi_1}{2\mu_{r1}^2} b_c^2 - \frac{\lambda}{2} \theta_{14} + \sum_{k=1}^2 \theta_{1k}^* \int_0^a \alpha W_k(\alpha) J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha -$$

$$\begin{aligned}
 & -2z \sum_{k=1}^2 b_{2k}^* \int_0^{\infty} \alpha^2 W_k(\alpha) J_0(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha; \quad t_{zz}^{(1)}(r, z) / \mu_1 = \\
 & = \sum_{k=1}^2 \theta_{2k}^* \int_0^{\infty} \alpha W_k(\alpha) J_1(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha - 2z \sum_{k=1}^2 b_{2k}^* \int_0^{\infty} \alpha^2 W_k(\alpha) J_1(\alpha r) e^{-\alpha z} d\alpha \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \theta_{1k} &= -2b_{1k} + 2(1 - 2\nu_1)b_{2k} - c_1^0 b_{3k}, \quad \theta_{11}^* = \theta_{11}, \quad \theta_{12}^* = \theta_{12} + \tau \cdot \theta_{13} \\
 b_{22}^* &= b_{22} + \tau \cdot b_{23}, \quad b_{21}^* = b_{21}, \quad c_1^0 = c_1 + \frac{1 + 2\chi_1}{\mu_{r1}} b_c^2 \\
 \theta_{2k} &= -2b_{1k} + 4(1 - \nu_1)b_{2k} + c_5^0 b_{3k}, \quad \theta_{21}^* = \theta_{21}, \quad \theta_{22}^* = \theta_{22} + \tau \cdot \theta_{23}
 \end{aligned}$$

На плоскости $z = 0$ будем иметь

$$t_{zz}^{(1)}(r, 0) / \mu_1 = \frac{1 + 4\chi_1}{2\mu_{r1}^2} b_c^2 - \frac{\lambda}{2} \theta_{14} + \theta_{11}^* R_1(r) + \theta_{12}^* R_2(r) \quad (2.14)$$

где

$$R_1(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{tq(t)dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < a \end{cases}; \quad R_2(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{tp(t)dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r > a \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{tp(t)dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r < a \end{cases}$$

В общем случае из (2.14) можно найти КИ магнитоупругих напряжений

$$\begin{aligned}
 K_2^* &= K_2^*(\nu_1, \nu_2, \mu, b_c^2 \cdot \omega(\nu_1, \nu_2, \mu, \mu_{r1}, \mu_{r2}, b_c^2)) = \\
 &= \frac{1}{a^{1/2} P_0} \lim_{r \rightarrow a+0} [2(r-a)]^{1/2} \frac{t_{zz}^{(1)}(r, 0)}{\mu} = -\frac{2}{\pi} \frac{Q_0 g e^{\pi \epsilon} \theta_{12}^*}{f_{22}(g+1) P_0} \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

где ω -функция зависящая от магнитного поля и физических параметров задачи, явный вид которой нетрудно восстановить. В общем случае коэффициент интенсивности определяются формулой [9,10]

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \exp(\pi \epsilon) (r-a)^{0.5+\pi \epsilon} (t_{zz} - it_{rz})$$

где параметр ϵ зависит от механических и физических свойств пространств.

В качестве примера рассмотрим однородный случай (т.е. $f_{12} = f_{21} = 0$). Из (2.13) и (2.8) имеем

$$q(t) = 0; \quad p(t) = \frac{2Q_0 t}{\pi f_{22}}, \quad W_1(\alpha) = 0; \quad W_2(\alpha) = -\frac{2Q_0}{\pi f_{22}} \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha} \right)_\alpha \quad (2.16)$$

Выражение для $t_{zz}^{(1)}(r, 0) / \mu_1$ принимает вид

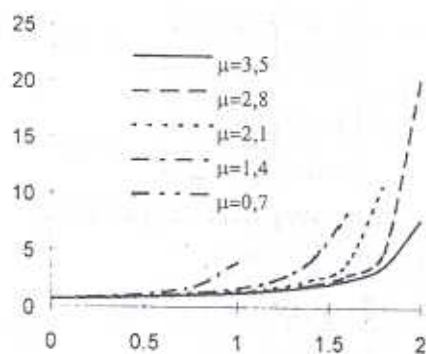
$$t_{zz}^{(1)}(r, 0) / \mu_1 = \frac{1 + 4\chi_1}{2\mu_{r1}^2} b_c^2 - \frac{\lambda}{2} \theta_{14} + \theta_{12}^* \frac{2Q_0}{\pi f_{22}} \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & r < a \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2\sqrt{r^2 - a^2}}, & r > a \end{cases} \quad (2.17)$$

Коэффициент интенсивности магнитоупругих напряжений определяется формулой

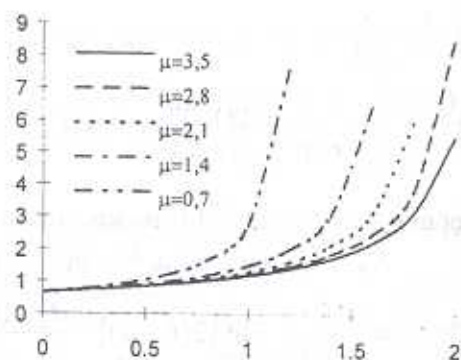
$$K_2^* = \frac{1}{P_0 a^{1/2}} \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{2(r-a)} t_{zz}^{(1)} / \mu_1 = -\frac{Q_0 \theta_{12}^*}{\pi P_0 f_{22}} \quad (2.18)$$

Формулы (2.16) - (2.18) ранее, иным путем, получены в работе [3].

3. Численные результаты. На основе формул (2.8) - (2.18), произведен численный анализ магнитоупругих напряжений около трещины. Ниже, магнитное поле B_0 выбирается так, чтобы выполнялось условие $g > 1$. Значение P_0 считается равным 0.001. Параметр $\mu = \mu_2 / \mu_1$ выбран из интервала $0 < \mu < 3.5$. Для обычных магнитомягких ферромагнитных материалов, магнитная проницаемость μ_j , ($j=1,2$) меняется в пределах $(10 \div 10^6)$ ([2-6, 8]). В чисто упругом случае (при отсутствии магнитного поля, т.е. $b_c^2 = 0$) КИ задачи $K_2^+(v_1, v_2, \mu, 0)$, будем обозначать через K_2^{++} . На фиг. 1-2 приведены значения K_2^+ в зависимости от b_c^2 .



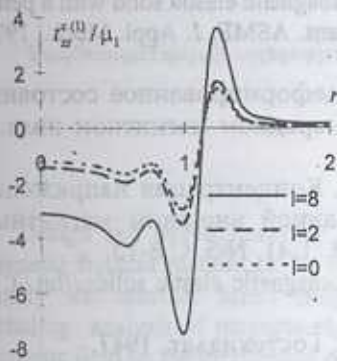
Фиг.1 Зависимость коэффициента интенсивности K_2^+ от магнитного поля ($v_1 = 0.25, v_2 = 0.35, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$)



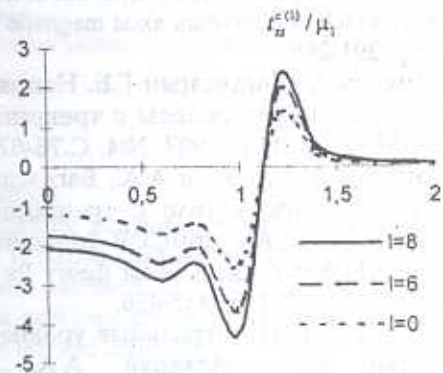
Фиг.2 Зависимость коэффициента интенсивности K_2^+ от магнитного поля ($v_1 = 0.25, v_2 = 0.45, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$)

Из численных расчетов видно, что: а) когда параметр μ монотонно убывает, K_2^+ монотонно возрастает; б) с увеличением v_2 КИ K_2^+ убывает; в) с увеличением μ_j ($j=1,2$), K_2^+ увеличивается. В частности, из фиг. 1-2 видно, что при $\mu = 0.7, v_1 = 0.25, v_2 = 0.45, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5$ и довольно слабых магнитных полях $B_0 \sim 3 \text{ Tesla}$ (в этом случае $b_c^2 \sim 10^{-5}$) имеет место $K_2^+ \approx 4.5 K_2^{++}$. Т.е. значение КИ с учетом магнитного поля 4.5 раза больше, чем значение КИ для чисто упругой задачи. Численные расчеты показывают также, что при $b_c^2 \rightarrow b_c^{2*}$ (b_c^{2*} - корень уравнения $g-1=0$) КИ $K_2^+ \rightarrow \infty$. В случае однородной задачи на этот факт обратил внимание Y. Shindo в работе [2]. Для конечных сред, КИ с увеличением магнитного поля монотонно возрастает и начиная с

некоторого значения магнитного поля резко снижается, стремясь к нулю [5]. То есть учет конечности среды приводит к тому, что КИ как функция от b_c^2 ограничена. Исследовано также влияние магнитного поля и физических параметров ($\mu, \nu_j, \mu_j (j=1,2)$) на магнитоупругие напряжения около трещины (фиг.3 — для $b_c^2 = 1 \cdot 10^{-6}, \nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.45, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5, \mu = 0.7, z_1 = 0.1$), фиг.4 — $b_c^2 = 1 \cdot 10^{-6}, \nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.35, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^5, \mu = 2.1, z_1 = 0.1$). При численных расчетах выбраны $z_1 = z/a = 0.1, P_0 = 10^{-3}$. Магнитоупругие напряжения сравниваются с чисто упругими напряжениями (т.е. когда $b_c^2 = 0$)



Фиг.3 Зависимость магнитоупругого напряжения $t_z^{(1)}/\mu_1$ от r_1 .



Фиг.4 Зависимость магнитоупругого напряжения $t_z^{(1)}/\mu_1$ от r_1 .

Численные расчеты показывают, что: а) с увеличением параметра μ магнитоупругое напряжение $t_z^{(1)}/\mu_1$ монотонно увеличивается, когда $r_1 \in (0,1)$ и монотонно убывает при $r/a \in (1,+\infty)$; б) при $r/a > 1.5$ величина $t_z^{(1)}/\mu_1$ практически становится нулем; в) с увеличением ν_2 значение модуля $t_z^{(1)}/\mu_1$ увеличивается; г) с уменьшением параметра μ_j значение модуля магнитоупругого напряжения $t_z^{(1)}/\mu_1$ монотонно убывает; д) эффект магнитного поля тем сильнее, чем больше величина μ_j ; е) с увеличением параметра b_c^2 значение модуля магнитоупругого напряжения увеличивается.

4. Обсуждение результатов. На основе линеаризованных уравнений магнитоупругости, предложенной в работе [6], исследовано НДС кусочно-однородного пространства с трещиной. Магнитоупругие напряжения и КИ магнитоупругих напряжений определены аналитически. Показано, что магнитоупругие напряжения на конце трещины имеют особенности типа $r^{-1/2+ik}$, где $k = k(b_c^2, \nu_1, \nu_2, \mu, \mu_{r1}, \mu_{r2})$. Численные расчеты показывают, что величина k существенно зависит от магнитного поля и физических параметров задачи. Значение КИ в довольно слабых

магнитных полях ($B_0 \sim 1 \div 3 \text{ Tesla}$) несколько раз больше, чем значение КИ для чисто упругой задачи. Полученные результаты верны для магнитных полей, удовлетворяющих условию $b_c^2 < b_{c*}^2$. Таким образом, в неоднородных магнитоупругих средах магнитное поле существенно влияет на НДС около трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988; 470 с.
2. Shindo Y., Singular stresses in a soft ferromagnetic solid with a flat annular crack. //Acta Mech., 1983, 50, pp. 50-56.
3. Shindo Y., Magnetoelastic interaction of a soft ferromagnetic elastic solid with a penny shaped crack in a constant axial magnetic field.//Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1978, 45, pp. 291-296.
4. Асаян Д.Д., Багдасарян Г.Е. Напряженно-деформированное состояние ферромагнитной полосы с трещиной в однородном магнитном поле.// Изв.АН РФ. МТТ. 1997. №4. С.78-87.
5. Асаян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. Концентрация напряжений в магнитомягком теле с трещиной, вызванной внешним магнитным полем.// Изв. АН АрмССР. Механика, 1988. Т.41, №5. С.8-13.
6. Pao Y.-H., Yeh C.-S., A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids.//Int. J. of Eng. Sci., 11, 1973, pp.415-436.
7. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1947.
8. Асаян Д.Д., Асланян А.А., Багдасарян Г.Е. Концентрация магнитоупругих напряжений и индукционного магнитного поля в магнитном поле. Изв. АН АрмССР. Механика. 1988. Т. 41. №2. С. 10-19.
9. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Справочное пособие. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1988. С. 537.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
29.08.2000