ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №1, 2001 Механика

УДК 539.3.01

ИЗГИБ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ НА КОНЕЧНОМ УЧАСТКЕ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Шавлакадзе Н.Н.

Ն.Ն. Շավլակաձե
Վերջավոր մասում ամրացված փոփոխական կոշտության ներդիրով անիզոտրոպ սալի ծռումը

Աշխատանքում դիտարկվում է փոփոխական կոշտության ներդիրով անվերջ անիզոտրոպ սալի ծռման կոնտակտային խնդիրը: Ներդիրի և սալի փոխազդեցության անհայտ ճիգի նկատմամբ ստացվում է Պրանդտլի ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում: Անալիտիկ ֆունկցիաների մեթոդներով, ներդիրի կոշտության փոփոխության որոշակի օրենքի դեպքում, այդ հավասարման լուծումը ներկայացվում է բացահայտ տեսքով: Ստացված է ներդիրի ծայրերում կոնտակտային ճիգի եզակիության կարգի նվազեցում:

N.N. Shavlakadze
Bending of Elastic Anisotrope Plate, Reinforced on a Finite Site by Inclusion of Variable Rigidity

В работе рассматривается контактная задача изгиба бесконечной анизотропной пластинки с упругим включением переменной изгибной жесткости. Относительно неизвестного контактного усилия взаимодействия включения с пластинкой получается интегро-дифференциальное уравнение Прандтля. С применением методов теории аналитических функций решение этого уравнения представляется в явном виде, при изменении жесткости включения специальным законом. Достигается уменьшение порядка особенности контактного усилия в конце включения.

Контактные задачи взаимодействия упругих изотропных пластин с тонкими упругими элементами, в виде стрингеров и включений, а также связанные с ними библиографические справки изложены в работах [1-4]. Показано, что контактные напряжения вблизи концов накладки постоянного поперечного сечения имеют особенность порядка квадратного корня, такое же поведение контактных напряжений остается в случае, когда поперечное сечение накладки изменяется по эллиптическому закону [5]. Для упругого изотропного клина, подкрепленного на конечном участке стержнем, площадь поперечного сечения которого изменяется по линейному закону, построено решение в [6], а для анизотропной полубесконечной пластинки — в [7]. Доказывается, что контактное напряжение вблизи тонкого конца накладки имеет особенность порядка меньше 1/2, а в случае, когда поперечное сечение накладки изменяется по параболическому закону, контактное напряжение вблизи тонкого конца накладки становится ограниченным [8].

Контактные задачи об изгибе изотропных пластин, подкрепленных тонкими включениями (жесткими или упругими), рассмотрены в работах [9 – 12]. Эти задачи сводятся к интегральным уравнениям со специальной характеристической частью, решения которых ищутся в классе неинтегрируемых функций.

Нами исследованы контактные задачи для конечных или бесконечных пластин с упругими накладками переменной толщины (переменной изгибной жесткости) [13–15], относительно неизвестных контактных напряжений получается интегро-дифференциальное уравнение, характеристической частью которого является интегро-дифференциальное уравнение типа Прандтля. Это уравнение в некоторых условиях изучено в [16–17], но когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль любого порядка в концах линии интегрирования, уравнение качественно изменяется, в частности, оно эквивалентно сводится к сингулярному интегральному уравнению третьего рода.

В данной работе рассмотрим упругую анизотропную пластинку под действием изгибающих моментов на бесконечности: $M_x^\infty = M$, $M_y^\infty = 0$. По линии: $y = 0$, $0 < x < 1$ она подкреплена тонким упругим включением переменной изгибной жесткости $D_0(x)$. Требуется найти контактные усилия взаимодействия включения с пластинкой.

Наличие подкрепляющего включения вызывает скачок обобщенной поперечной силы N_y в пластинке. Используя обозначение: $< f >= f(x,-0) - f(x,+0)$, имеем:

$$<W>=<W'_y>=<M_y>=0,\ <N_y>=\mu(x),\ 0<x<1 \tag{1}$$

где W – прогиб пластинки, W'_y, M_y, N_y – соответственно угол поворота, изгибаюший момент и обобщенная поперечная сила в пластинке, $\mu(x)$ – неизвестное контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем $\mu(x) = 0$ при $x \notin (0,1)$ и удовлетворяет условиям равновесия включения:

$$\int_0^1 \mu(t)dt = 0,\quad \int_0^1 t\mu(t)dt = -M_1 + M_2 \tag{2}$$

где M_1 и M_2 – неизвестные моменты на концевых сечениях $x = 0$ и $x = 1$ соответственно.

Относительно прогиба включения $\omega_0(x)$ получается следующая краевая задача:

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dx^2} D_0(x) \frac{d^2}{dx^2}\omega_0(x) = -\mu(x), \qquad 0<x<1 \\ D_0(x)\omega''_0(x)\Big|_{x=0} = M_1,\quad D_0(x)\omega''_0(x)\Big|_{x=1} = M_2 \\ \left[D_0(x)\omega''_0(x)\right]'\Big|_{x=0} = 0,\quad \left[D_0(x)\omega''_0(x)\right]'\Big|_{x=1} = 0\end{gathered} \tag{3}$$

где $D_0(x) = E_0(x)h_0^3(x)/12$ – жесткость включения на изгиб, $h_0(x)$ – толщина, а $E_0(x)$ – модуль Юнга материала включения.

Как известно, [18], напряженное состояние тонкой анизотропной пластинки определяется прогибом средней плоскости $W(x,y)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=0 \quad (4)$$

Осуществляя условие контакта включения с пластинкой

$$W(x,0)=\omega_0(x) \quad (5)$$

решение краевой задачи (1−5) будем искать в классе функций $W(x,y)$, имеющих вторые производные, ведущих себя как $r^{-1/2}$ при приближении к точкам $(0,0)$ и $(1,0)$ и ограниченных на бесконечности.

Общее выражение для функции $W(x,y)$ зависит от корней μ_1, μ_2, $\overline{\mu}_1$, $\overline{\mu}_2$ соответствующего характеристического уравнения:

$$W=2\,\mathrm{Re}[W_1(z_1)+W_2(z_2)],\quad (\mu_1\neq\mu_2) \quad (6)$$

где $W_1(z_1)$ и $W_2(z_2)$ − произвольные аналитические функции комплексных переменных; $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=x+\mu_2 y$, μ_1 и μ_2 − комплексные или чисто мнимые постоянные: $\mu_1=\alpha+i\beta$, $\mu_2=\gamma+i\delta$.

Общие выражения для моментов и перерезывающих сил (при $\mu_1\neq\mu_2$) имеют вид:

$$\begin{aligned}
M_x&=-2\,\mathrm{Re}[p_1W_1''(z_1)+p_2W_2''(z_2)]\\
M_y&=-2\,\mathrm{Re}[q_1W_1''(z_1)+q_2W_2''(z_2)]\\
M_{xy}&=-2\,\mathrm{Re}[r_1W_1''(z_1)+r_2W_2''(z_2)]\\
N_x&=-2\,\mathrm{Re}[\mu_1 s_1W_1'''(z_1)+\mu_2 s_2W_2'''(z_2)]\\
N_y&=-2\,\mathrm{Re}[s_1W_1'''(z_1)+s_2W_2'''(z_2)]
\end{aligned} \quad (7)$$

где $p_i=D_{11}+D_{12}\mu_i^2+2D_{16}\mu_i$, $q_i=D_{12}+D_{22}\mu_i^2+2D_{26}\mu_i$,

$r_i=D_{16}+D_{26}\mu_i^2+2D_{66}\mu_i$, $\quad s_i=D_{11}/\mu_i+3D_{16}+(D_{12}+2D_{66})\mu_i+D_{26}\mu_i^2$,

$s_i-r_i=p_i/\mu_i$, $s_i+r_i=-q_i\mu_i$, $\quad i=1,2$

Функции $W_1'(z_1)$ и $W_2'(z_2)$, для пластинки с отверстием, когда усилия, распределенные по краям отверстия, уравновешиваются, в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид:

$$W_1'(z_1)=Bz_1+\overset{0}{W_1'}(z_1),\quad W_2'(z_2)=(B'+iC')z_2+\overset{0}{W_2'}(z_2) \quad (8)$$

где $\overset{0}{W_1'}(z_1)$, $\overset{0}{W_2'}(z_2)$ − функции, голоморфные вне отверстия, включая бесконечно удаленную точку. Моменты на бесконечности выражаются через постояные B, B', C':

$$\begin{aligned}
&M_x^\infty=-\mathrm{Re}[p_1B+p_2(B'+iC')],\ M_y^\infty=-\mathrm{Re}[q_1B+q_2(B'+iC')]\\
&M_{xy}^\infty=-\mathrm{Re}[r_1B+r_2(B'+iC')],\ N_x^\infty=0,\ N_y^\infty=0
\end{aligned} \quad (9)$$

В силу формулы (6) имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\,\mathrm{Re}[W_1'(z_1) + W_2'(z_2)]$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\,\mathrm{Re}[\mu_1 W_1'(z_1) + \mu_2 W_2'(z_2)]$$

и, с учетом (7), условия (1) дают:

$$\begin{aligned}
&< W_1'(x) + W_2'(x) + \overline{W_1'(x)} + \overline{W_2'(x)} >= 0 \\
&< \mu_1 W_1'(x) + \mu_2 W_2'(x) + \overline{\mu}_1 \overline{W_1'(x)} + \overline{\mu}_2 \overline{W_2'(x)} >= 0 \\
&< q_1 W_1''(x) + q_2 W_2''(x) + \overline{q}_1 \overline{W_1''(x)} + \overline{q}_2 \overline{W_2''(x)} >= 0 \\
&< s_1 W_1'''(x) + s_2 W_2'''(x) + \overline{s}_1 \overline{W_1'''(x)} + \overline{s}_2 \overline{W_2'''(x)} >= \mu(x), \quad 0 < x < 1
\end{aligned} \tag{10}$$

Продифференцировав первое и второе равенства два раза, а третье — один раз, относительно скачков $< W_1'''(x) >, < W_2'''(x) >, < \overline{W_1'''(x)} >$, $< \overline{W_2'''(x)} >$, получается система алгебраических уравнений. Если детерминант этой системы отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \overline{\mu}_1 & \overline{\mu}_2 \\ q_1 & q_2 & \overline{q}_1 & \overline{q}_2 \\ s_1 & s_2 & \overline{s}_1 & \overline{s}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

получим следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}
&[W_1'''(x)]^- - [W_1'''(x)]^+ = -\frac{\Delta_1}{\Delta}\mu(x) \\
&[W_2'''(x)]^- - [W_2'''(x)]^+ = -\frac{\Delta_2}{\Delta}\mu(x), \quad 0 < x < 1
\end{aligned} \tag{11}$$

где $[W_i'''(x)]^\pm$ $(i = 1,2)$ — граничные значения аналитических функций $W_i'''(z_i)$, $(i = 1,2)$ из верхней и нижней полуплоскостей соответственно.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_2 & \overline{\mu}_1 & \overline{\mu}_2 \\ q_2 & \overline{q}_1 & \overline{q}_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \overline{\mu}_1 & \overline{\mu}_2 \\ q_1 & \overline{q}_1 & \overline{q}_2 \end{vmatrix}$$

Функция $\mu(x)$ может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте [0,1], учитывая проведенные в [11] доказательства о перенесении результатов монографии [19] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [20], учитывая, что $W_1'''(\infty) = W_2'''(\infty) = 0$, решения граничных задач (11) представляются в виде:

$$W_1'''(z_1) = \frac{\Delta_1}{2\pi i \Delta}\int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{t - z_1}, \quad W_2'''(z_2) = \frac{\Delta_2}{2\pi i \Delta}\int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{t - z_2}.$$

где z_1 и z_2 — комплексные переменные, изменяющиеся соответственно в областях S_1 и S_2 [18], разрезанных вдоль отрезка (0,1).

В силу формул (8), функции $W_1''(z_1)$ и $W_2''(z_2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} W_1''(z_1) &= \frac{\Delta_1}{2\pi i\Delta}\int_0^1 \ln|t - z_1|\mu(t)dt + B \\ W_2''(z_2) &= \frac{\Delta_2}{2\pi i\Delta}\int_0^1 \ln|t - z_2|\mu(t)dt + B' + iC' \end{aligned} \tag{12}$$

Постоянные B, B' и C' определяются из следующей системы уравнений:

$$(p_1 + \overline{p}_1)B + p_2 B_1 + \overline{p}_2\overline{B}_1 = -M$$

$$(q_1 + \overline{q}_1)B + q_2 B_1 + \overline{q}_2\overline{B}_1 = 0$$

$$(r_1 + \overline{r}_1)B + r_2 B_1 + \overline{r}_2\overline{B}_1 = 0, \quad B_1 = B' + iC'$$

Осуществляя условие контакта (5) включения с пластинкой, имея в виду, что $\partial^2 W(x,0)/\partial x^2 = 2\,\mathrm{Re}[W_1''(x) + W_2''(x)]$, с учетом (12), условие (3) будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} D_0(x)\left[\frac{\lambda_0}{\pi}\int_0^1 \ln|t - x|\mu(t)dt + B + B'\right] = -\mu(x), \quad 0 < x < 1$$

где $\lambda_0 = \mathrm{Im}\dfrac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta}$.

Интегрируя последнее уравнение два раза и вводя обозначение $\lambda(x) = -\int_0^x dt \int_0^t \mu(s)ds$, приходим к уравнению

$$\lambda(x) - \frac{\lambda_0}{\pi} D_0(x)\int_0^1 \frac{\lambda'(t)dt}{t - x} = -(B + B')D_0(x), \quad 0 < x < 1 \tag{13}$$

при условии

$$\lambda(0) = 0,\ \lambda(1) = -M_1 + M_2,\ \lambda'(0) = \lambda'(1) = 0 \tag{14}$$

Моменты M_1 и M_2 на концевых сечениях включения определяются из следующих соотношений:

$$M_1 = \int_{-h_0(0)/2}^{h_0(0)/2} M_x(0,y)dy, \quad M_2 = \int_{-h_0(1)/2}^{h_0(1)/2} M_x(1,y)dy \tag{15}$$

В работе [15] доказана теорема, из которой следует справедливость следующей теоремы:

Если в задаче (1–5) изгибная жесткость включения изменяется законом: $D_0(x) = x^\alpha b(x)$, $(b(x) > 0,\ \alpha > 0,\ 0 \le x \le 1)$, то контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой в окрестности точки $x = 0$ имеет следующее поведение:

$$< N_y > \equiv \mu(x) = \begin{cases} O(x^{-3/2}) & \text{при } 0 \le \alpha < 1 \\ O(x^{-2+\delta_0}) & \text{при } \alpha = 1, \delta > 1/2 \\ O(x^{-1}) & \text{при } 1 < \alpha \le 2 \\ O(x^{\alpha-3}) & \text{при } \alpha > 2 \end{cases}$$

Пусть изгибная жесткость включения изменяется законом: $D_0(x) = D_0 x^2$, $D_0 = \text{const}$, $0 < x < 1$. Производя замену переменных:

$$x = \frac{1}{1+e^{\xi}},\ t = \frac{1}{1+e^{\zeta}},\ \lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{1+e^{\xi}}\right) = \psi(\xi) \tag{16}$$

уравнения (13), (14) принимают вид:

$$e^{\xi}\psi(\xi) + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi'(\zeta)d\zeta}{1-e^{\zeta-\xi}} = \widetilde{M}_1\frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}} - \widetilde{M}_2\frac{e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^2},\ -\infty < \xi < \infty$$

$$\psi(-\infty) = M_2 - M_1,\ \psi(\infty) = 0 \tag{17}$$

где $\lambda = \lambda_0 D_0$, $\widetilde{M}_1 = \lambda(M_1 - M_2)/\pi$, $\widetilde{M}_2 = (B + B')D_0$.

Произведем преобразование Фурье обеих частей уравнения (17), где в качестве параметра рассмотрим комплексную переменную $s = s_0 - i\varepsilon$ (ε — сколь угодно малое положительное число). После некоторых преобразований уравнение (17) сводится к условию задачи типа Карлемана для полосы:

$$\Psi(s-i) + \lambda s\,\text{cth}\pi s\Psi(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widetilde{M}_2\frac{s}{\text{sh}\pi s} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\widetilde{M}_1 i\frac{1}{\text{sh}\pi s}, \tag{18}$$

$$-\infty - i\varepsilon < s < +\infty - i\varepsilon$$

где $\Psi(s)$ — преобразование Фурье функции $\psi(\xi)$.

Требуется найти функцию $\Psi(z)$, голоморфную в полосе $-1-\varepsilon < \text{Im}\,z < -\varepsilon$, непрерывную на границе полосы и удовлетворяющую условию (18).

Представим функцию $s\,\text{cth}\pi s$ в таком виде:

$$G(s) \equiv s\,\text{cth}\pi s = is\,\text{cth}\pi s\,\text{th}\frac{\pi}{2}s\frac{\text{sh}[\pi(s-i)/2]}{\text{sh}(\pi s/2)} = isG_0(s)\frac{\text{sh}[\pi(s-i)/2]}{\text{sh}(\pi s/2)}$$

Ввиду того, что $\text{Ind}G_0(s) = \text{Ind}(\text{cth}\pi s\,\text{tg}(\pi s/2) = 0$, функция $G_0(s)$ может быть представлена в виде [21]: $G_0(s) = \chi_0(s-i)/\chi_0(s)$,

где $\chi_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2i}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}\ln[G_0(s)]\text{cth}\pi(s-z)ds\right\}$.

Тогда решение поставленной задачи можно представить в виде:

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2z}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}\frac{F(s)(1+is)ds}{\chi(s)\text{sh}\pi(s-z)},\ -1-\varepsilon < \text{Im}\,z < -\varepsilon \tag{19}$$

где $\chi(z)=\chi_0(z)\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}z\chi_1(z)$, $\chi_1(z)=\exp(iz\ln\lambda)\Gamma(1+iz)$

$$F(z)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widetilde{M}_2\frac{z}{\operatorname{sh}\pi z}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widetilde{M}_1 i\frac{1}{\operatorname{sh}\pi z}.$$

С применением асимптотической оценки Стирлинга для Гамма-функции, функция $\chi(z)$ в указанной полосе допускает оценки: $A_1|t|^{1/2}<|\chi(t+i\tau)|<A_2|t|^{3/2}$, $-\infty-i\varepsilon<t<+\infty-i\varepsilon$, $-1-\varepsilon<\tau<-\varepsilon$..

Так как функция $F(z)$ экспоненциально исчезает на бесконечности, легко доказать, что и функция $\Psi(z)$, представленная формулой (19), обладает указанным свойством. Кроме того, в точке $z=-i$ она имеет полюс первого порядка.

Применяя эти свойства функции $\Psi(z)$, по формуле Коши получаем:

$$\psi''(\xi)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}s^2\Psi(s)e^{-is\xi}ds=$$

$$=ce^{-\xi}-\frac{e^{-(1+\varepsilon)\xi}}{2\pi}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}(s-i-i\varepsilon)\Psi(s-i-i\varepsilon)e^{-is\xi}ds$$

где c — некоторая постоянная.

Так как $\lambda_0''(y)=[\psi''(\ln y)-\psi'(\ln y)]/y^2$, следовательно, функция $\lambda_0''(y)$ при достаточно больших y допускает оценки: $\lambda_0''(y)=O(y^{-3})$, $y\to\infty$, а для скачка обобщенной поперечной силы V_y имеем:

$$<V_y>\equiv\mu(x)=\lambda''(x)=O(x^{-1}),\quad x\to 0 \tag{20}$$

Таким образом, в рассмотренном случае относительно функции $D_0(x)$, задача (1−5) решается в квадратурах, решение получается обратным преобразованием Фурье от функции $\Psi(z)$, представленной формулой (19), а асимптотическое поведение искомой функции $\mu(x)$ дается формулой (20).

Заметим, что в наших условиях постановки задачи можно взять $h_0(0)=0$, и соответственно из (15) следует: $M_1=0$, а M_2 определяется из второй формулы (15) с учетом (7), (12), (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением //ПММ. 1968. Т.32. №4. С.632−646.
2. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15−37.
3. Абрамян Б.Л. О некоторых результатах, полученных армянскими

исследователями в области теории упругости и пластичности //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1976. Т.29. №1. С.12–26.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
5. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением //ПММ. 1970. Т.34. №3. С.412–422.
6. Нуллер Б.М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения //Изв.АН СССР. МТТ. 1972. №5. С.150–155.
7. Гоголаури Л.А. Упругая анизотропная пластинка, подкрепленная на конечном участке стержнем переменного сечения //Сообщ. АН ГССР. 1985. Т.119. №3. С.489–492.
8. Шавлакадзе Н.Н. Упругая изотропная полуплоскость, подкрепленная конечным стержнем переменного сечения //Сообщ. АН ГССР. 1988. Т.130. №3. С.509–512.
9. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями //Изв.АН СССР. МТТ. 1980. №4. С.141–150.
10. Онищук О.В., Попов Г.Я., Процеров Ю.С. О некоторых задачах для подкрепленных пластин //ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.307–314.
11. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями //ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.293–302.
12. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
13. Shavlakadze N. On some contact problem for bodies with elastic inclusion //Georg.Math. J., 5(1998), №3, 285–300.
14. Shavlakadze N. A contact problem of the Interaction of Semi-Finite inclusion with a plate //Georg. Math. J. 6(199), №5, 489–500.
15. Shavlakadze N. On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Proc. of A. Razmadze Math.Inst. 120 (1999), 135–147.
16. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля //ПММ. 1945. Т.9. №2. С.143–150.
17. Магнарадзе Л.Г. Об одном интегральном уравнении теории крыла самолета //Сообщ. АН ГССР. 1942. Т.3. №6. С.503–508.
18. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
19. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
20. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
21. Банцури Р.Д. Об одной граничной задаче теории аналитических функций //Сообщ. АН Груз.ССР. 1974. Т.73. №3. С.549–552.

Институт математики
им. А.Размадзе НАН Грузии

Поступила в редакцию
26.12.2000