ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա **54, №1, 2001** Механика

УДК 539.3

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Мовисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Բազմաշերտ սալերի կայունության մասին

Դիտարկվում է միջին հարթության նկատմամբ սիմետրիկ և անտիսիմետրիկ դասավորված անիզոտրոպ բազմաշերտ սալերի կայունությունը: Շերտերի հաստության ընտրությամբ և առաձգականության գլխավոր ուղղությունների պտտումով հնարավոր է դառնում կայունության հավասարումը բերել տեսքի, որը թույլ է տալիս փոփոխականների անջատում: Տարբեր եզրային պայմանների համար դիտարկված խնդիրներում լուծվել է մեծագույն կրիտիկական ճիգեր ստանալու հարցը:

**L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan**

**About Stability of Laminated Plates**

Слоистую пластинку можно получить различными способами. В зависимости от строения слоев различными будут и разрешающая система уравнений. В общем случае уравнения многослойных анизотропных пластин [1] мало доступны для исследования, если не более. Поэтому часто, но не только из этих соображений, бывает целесообразным рассматривать частные виды строения [2, 3 и др.]. В настоящей работе изучается устойчивость анизотропной слоистой пластинки в предположении, что относительно координатной плоскости слои расположены симметрично в геометрическом отношении, а в физическом — симметрично и антисимметрично [3].

**1.** Слоистую пластинку, каждый монослой которой ортотропен, получим следующим образом. Она состоит из $2n$ слоев, так что относительно координатной (срединной) плоскости слои с одинаковым номером (находящиеся в разных сторонах от координатной плоскости), имеют одинаковые толщины (геометрическая симметрия). Что касается ориентации главных упругих направлений, то каждый слой имеет свой угол поворота относительно координатных линий, но так, что в одном случае слои с одинаковыми номерами повернуты на одинаковый угол $\varphi_k$ (симметричное строение), а в другом — на $\pm\varphi_k$ (антисимметричное строение).

Если обозначить упругие постоянные относительно главных направлений упругости в плоскости пластинки через $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{22}$, $A_{66}$, то при повороте этих направлений относительно координатных на некоторый угол $\varphi_k$ (свой для каждого слоя) закон упругости запишется

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)} &= B_{11}^{(k)} e_x + B_{12}^{(k)} e_y + B_{16}^{(k)} e_{xy} \\
\sigma_y^{(k)} &= B_{12}^{(k)} e_x + B_{22}^{(k)} e_y + B_{26}^{(k)} e_{xy} \qquad (1.1) \\
\sigma_{xy}^{(k)} &= B_{16}^{(k)} e_x + B_{26}^{(k)} e_y + B_{66}^{(k)} e_{xy}
\end{aligned}$$

где новые постоянные выражаются через старые следующим образом:

$$B_{11}^{(k)} = A + B\cos 2\varphi_k + C\cos^2 2\varphi_k,\quad B_{22}^{(k)} = A - B\cos 2\varphi_k + C\cos^2 2\varphi_k$$

$$B_{12}^{(k)} = A_{12} + C\sin^2 2\varphi_k,\quad B_{66}^{(k)} = A_{66} + C\sin^2 2\varphi_k \tag{1.2}$$

$$B_{16}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(B\sin 2\varphi_k + C\sin 4\varphi_k\right),\quad B_{26}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(B\sin 2\varphi_k + C\sin 4\varphi_k\right)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{4}\left(A_2 + A_3\right),\ B = \frac{1}{2}\left(A_{11} - A_{22}\right),\ C = \frac{1}{4}\left(A_2 - A_3\right)$$

$$D = \frac{1}{4}\left(3A_2 - A_3\right),\ A_2 = A_{11} + A_{22},\ A_3 = 2\left(A_{12} + 2A_{66}\right)$$

Как видно из (1.2), часть упругих коэффициентов относительно $\varphi_k$ четная, а другая часть нечетная. В связи с этим, совершенно различными будут структуры соотношений упругости (усилия и моменты для пакета в целом) для симметричного и антисимметричного случаев. В пределах классической теории для упругих соотношений будем иметь

$$\begin{aligned}
T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\varepsilon_{12},\ M_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{16}\chi_{12}\\
T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{26}\varepsilon_{12},\ M_2 = D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2 + D_{26}\chi_{12}\\
T_{12} &= C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\varepsilon_{12},\ M_{12} = D_{16}\chi_1 + D_{26}\chi_2 + D_{66}\chi_{12}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

при симметричном расположении слоев и

$$\begin{aligned}
T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{16}\chi_{12},\quad M_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + K_{16}\varepsilon_{12}\\
T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + K_{26}\chi_{12},\quad M_2 = D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2 + K_{26}\varepsilon_{12}\\
T_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12} + K_{16}\chi_1 + K_{26}\chi_2,\ M_{12} = D_{66}\chi_{12} + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

для антисимметричного случая.

Здесь

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\\
\chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$u, v, w$ — компоненты перемещения соответственно по осям $x, y, z$, а для приведенных жесткостей имеем

$$C_{ij} = 2\sum_{k=1}^{n} B_{ij}^{(k)}\left(h_k - h_{k-1}\right),\ K_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ij}^{(k)}\left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right),\ D_{ij} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} B_{ij}^{(k)}\left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) \tag{1.6}$$

где $h_k - h_{k-1}$ — толщина $k$-того слоя, $h_n = h$.

В предположении, что прямоугольная пластина равномерно сжата в направлении одной из сторон, уравнениями устойчивости в общем случае будут:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Как видно из (1.3), (1.4) и (1.7), в симметричном случае для изучения устойчивости из (1.7) достаточно только третье уравнение, в то время как в антисимметричном случае необходима система полностью. В последнем случае слоистая пластинка ведет себя как оболочка, когда плоская задача и задача изгиба не разделяются. Кстати, с этой точки зрения интересен такой факт. Антисимметричная пластинка, как и оболочка, небезразлична относительно граничных условий начального состояния, то есть критическая сила существенно зависит от того, на кромках заданы усилия или перемещение? Покажем это на примере несимметрично собранной пластинки из ототропных слоев [1], уравнения устойчивости которой будут (цилиндрический изгиб)

$$C_{11}\frac{d^2u}{dx^2}-K_{11}\frac{d^3w}{dx^3}=0$$
$$K_{11}\frac{d^3u}{dx^3}-D_{11}\frac{d^4w}{dx^4}-P\frac{d^2w}{dx^2}=0 \tag{1.8}$$

Так вот, при условиях свободного шарнирного опирания $\left(w=M_1=T_1=0\right)$ критическое усилие определится

$$P_{\text{кр}}=K\frac{\pi^2}{l^2},\quad K=D_{11}-\frac{K_{11}^2}{C_{11}} \tag{1.9}$$

когда пластинка сжимается усилием $P$.

Для шарнирно-закрепленного случая $(u=w=M_1=0)$ при условии, что на одном конце задано начальное перемещение $u_0$, критическое усилие определяется из уравнения

$$pl\sin pl+\frac{2K_{11}^2}{KC_{11}}\left(1-\cos pl\right)=0 \tag{1.10}$$

где

$$p^2=\frac{C_{11}u_0}{D_{11}l},\quad P=Kp^2$$

Для симметричной же пластинки в обоих случаях критическое усилие будет

$$P_{\text{кр}}=D_{11}\frac{\pi^2}{l^2},\quad P=\frac{C_{11}u_0}{l} \tag{1.11}$$

которое получается из $\sin pl=0$. Из (1.10), в частности, получится это условие при $K_{11}=0$.

2.Подставляя (1.3) в (1.7), для симметричного случая получим

$$D_{11}\frac{\partial^4w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4w}{\partial x^3\partial y}+2D_3\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4w}{\partial y^4}+P\frac{\partial^2w}{\partial x^2}=0$$
$$D_3=D_{12}+2D_{66} \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1), которое не допускает разделения переменных, для однослойной пластинки решалось численно или методом последовательных приближений [4], но здесь его будем изучать, исходя из других позиций.

Вопрос будем ставить таким образом. Как подобрать величины толщин слоев и перевернуть главные направления упругости каждого слоя так, чтобы члены с $D_{16}$ и $D_{26}$ равнялись нулю. На основании (1.2) и (1.6) это будет при

$$B\sum_{k=1}^{n} a_k \sin 2\varphi_k \pm C\sum_{k=1}^{n} a_k \sin 4\varphi_k = 0,\ a_k = h_k^3 - h_{k-1}^3$$

то есть эти члены исчезнут, если

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin 2\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin 4\varphi_k = 0 \tag{2.2}$$

К ним добавим еще очевидное условие

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ \alpha_k = a_k h^{-3},\quad 0 < \alpha_k < 1 \tag{2.3}$$

Для прямоугольной пластинки $(a \times b)$ с свободно опертыми кромками критическое усилие определяется [2]

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{b^2}\left(D_{11}c^2 + 2D_3 + 2D_{22}c^{-2}\right),\ c = \frac{mb}{a},\ m = 1,2,... \tag{2.4}$$

которое принимает минимальное значение при $c = \sqrt[4]{D_{22}/D_{11}}$ и оно равно

$$P_{\min} = \frac{2\pi^2}{b^2}\left(\sqrt{D_{11}D_{22}} + D_3\right) \tag{2.5}$$

Так вот вопрос будем ставить следующим образом. Подобрать толщины слоев и углы поворотов каждого из них, удовлетворяющих условиям (2.2) и (2.3) так, чтобы (2.4) и (2.5) получили максимальное значение.

В [3] такой вопрос был рассмотрен для случая $A_{11} = A_{22}$, когда из (2.2) только последнее равенство является условием.

Этот же вопрос ставится и для пластинки, края $x = 0$ и $x = a$ которой свободно оперты, а $y = \pm b/2$ жестко заделаны. Тогда критическое усилие определится из

$$s_1 \operatorname{th} s_1 + s_2 \operatorname{tg} s_2 = 0 \tag{2.6}$$

$$s_1 = \frac{\pi c}{2}\left(\sqrt{S} + \frac{D_3}{D_{22}}\right)^{1/2},\ s_2 = \frac{\pi c}{2}\left(\sqrt{S} - \frac{D_3}{D_{22}}\right)^{1/2},\ S = \frac{D_3^2 - D_{11}D_{22}}{D_{22}^2} + \frac{Pb^2}{D_{22}c^2}$$

3.Для антисимметрично собранной пластинки, подставляя (1.3) в (1.7), получим систему, которая, правда, в одном случае допускает разделение переменных ($u = w = M_1 = T_{12} = 0$ при $x = 0; a$), но здесь поступим, как и в предыдущем пункте, то есть слои и их расположение подберем так, чтобы исчезли члены $K_{16}$ и $K_{26}$. И для этого случая уравнение устойчивости будет то же самое, но вместо (2.2) и (2.3) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin 2\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin 4\varphi_k = 0,\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1,\ \beta_k = a_k h^{-2} \tag{3.1}$$

Тогда формулы (2.4)-(2.6) останутся в силе, только другими будут $h_k$ и $\varphi_k$ по сравнению с п.2.

**4.**Численное исследование проводилось для материалов углепластика и боропластика с данными [5]

| Углепластик | Боропластик |
|---|---|
| A=182,2 | 201,9 |
| A=2,915 | 3,635 |
| A=10,35 | 21,77 |
| A=6,9 | 5,4 |

Значение упругих постоянных в Гпа.

Ниже приводятся таблицы для безразмерного усилия

$$\lambda = 3Pb^2 / 4\pi^2 h^3 A_{11} \tag{4.1}$$

для случаев $n=2$ и 3 (фактически четыре и шесть слоев) и геометрических размеров $a/b=1;2$.

Для толщин выбраны также отношения

I $\alpha_k = 1/n$

II $\alpha_k = \left[k^3-(k-1)^3\right]/n^3$ (постоянные толщины $-\ h_k - h_{k-1} = \text{const}$)

В табл.1 приведены минимальные и максимальные значения $\lambda$ для обоих материалов по (2.5). Рядом с значением $\lambda$ в скобках указаны углы в градусах, при которых достигаются максимальные и минимальные значения, при этом, если углы равные (т.е. по сути однослой), то указывается только одно значение. В следующих таблицах помимо углов указывается еще число полуволн потери устойчивости – первое число в скобках. Чтобы не загромождать таблицы цифрами, при одинаковых с предыдущими клетками значениях и углов ставятся черточки, причем одна, если сходство по вертикали, и две – по горизонтали.

В табл.2 и 3 приведены значения $\lambda$, определенные по (2.4) и (2.6) соответственно для углепластика и боропластика, при этом, первых два столбца – по (2.4), а два оставшихся – по (2.6).

Расчеты показывают, что $\lambda$ своего максимального и минимального значений может достичь (не всегда) при различных сочетаниях углов поворота.

Были вычислены max, min также по (2.4), но при условиях (3.1) – $\beta_k = 1/n,\ \beta_k = \left[k^2-(k-1)^2\right]/n^2$.

Нужно отметить, что полученные значения незначительно отличаются от приведенных в табл.2 и 3. Наибольшие отличия следующие: вместо 0,9291 в табл.2 здесь получается 1,005, а вместо 0,9113 в табл.3 – 0,9728.

Приведенные данные позволяют сделать следующие общие выводы.

1) Получаемые значения $\lambda$ максимум и минимум существенно отличаются друг от друга, порою почти в три раза.

2) Вопрос подбора числа слоев и углов их поворота при каждых геометрических размерах и видах граничных условий, для получения наибольшего критического усилия в каждом случае должен быть решен в отдельности: то, что хорошо в одном случае, может не быть таковым при других случаях.

Таблица 1

| $n$ | материал № | Углепластик | Боропластик |
|---|---|---|---|
| 2 | I | 0.3462 (180)<br>1.108 (135.45) | 0.3301 (180)<br>1.057 (135.45) |
| | II | – (–)<br>0.4593 (180.90) | – (–)<br>0.4844 (180.90) |
| 3 | I | – (–)<br>0.9067 (49.131.180) | – (–)<br>0.8886 (140.40.90) |
| | II | – (–)<br>0.5457 (165.2.90) | – (–)<br>0.5874 (165.2.90) |

Таблица 2

| $n$ | a/b № | 1 | 2 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | I | 0.3585 (2.90)<br>1.108 (1.135.45) | = (=)<br>= (=) | 0.7927 (3.90)<br>2.091 (2.180) | = (2.180)<br>1.626 (3.133.47) |
| | II | – (–)<br>0.5763 (1.173.1) | = (2.180)<br>= (=) | – (–)<br>– (–) | – (–)<br>1.289 (3.97.89) |
| 3 | I | – (–)<br>0.9291<br>(1.180.135.45) | – (1.180)<br>= (2. =) | – (–)<br>– (–) | – (–)<br>1.528 (3.134.46.90) |
| | II | – (–)<br>0.5774<br>(1.75.92.90) | – (1.180)<br>= (2. =) | – (–)<br>– (2.173.1.180) | – (–)<br>1.289 (3.105.88.90) |

Таблица 3

| $n$ | a/b № | 1 | 2 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | I | 0.3304 (2.90)<br>1.057 (1.35.45) | = (1.180)<br>= (2.=) | 0.6544 (3.90)<br>2.1453 (2.180) | 0.7584 (2.180)<br>1.596 (3.132.48) |
| | II | – (–)<br>0.6239 (1.173.1) | – (–)<br>= (2.=) | – (–)<br>– (–) | – (–)<br>1.3225 (3.97.89) |
| 3 | I | – (–)<br>0.9113<br>(1.180.135.45) | – (–)<br>= (=) | – (–)<br>– (–) | – (–)<br>5.515 (3.134.46.90) |
| | II | – (–)<br>0.6248<br>(1.165.2.180) | – (–)<br>= (2. =) | – (–)<br>– (–) | – (–)<br>1.323 (3.105.88.90) |

## ЛИТЕРАТУРА


1. Кристенсен Р. Введение в механику. М.: Мир, 1982. 336 с.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.
3. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругой и вязкоупругой анизотропной многослойной пластинки //Изв.АН Арм.ССР, Механика. 1990. Т.43. №2. С.3-12.
4. Саркисян В.С., Мовсисян Л.А. Об одном способе определения критических нагрузок анизотропных пластинок //Инж. ж-л. 1965. Т.5. Вып.4. С.777-782.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.



Институт механики
НАН Армении



Поступила в редакцию
17.03.2000