ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №1, 2001 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ДВУХСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛЫМ МНОГОУГОЛЬНИКОМ И ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ

Капанадзе Г.А.

Գ.Ա. Կապանաձե
Ուռուցիկ բազմանկյունով և ուղղագիծ կտրվածքով սահմանափակված երկկապ վերջավոր տիրույթի համար սալի ծռման մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է ուռուցիկ բազմանկյունով և ուղղագիծ կտրվածքով սահմանափակված երկկապ վերջավոր տիրույթի համար իզոտրոպ առաձգական սալի ծռման խնդիրը: Ենթադրվում է, որ արտաքին եզրագծի յուրաքանչյուր օղակին ամրացված է կոշտ ձող և սալը ծռվում է ձողերի վրա կիրառված նորմալ-ծռող մոմենտներով, իսկ եզրագծի ներքին մասը ազատ հենված է: Տվյալ տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերմամբ շրջանային օղակի վրա կառուցված է խնդրի էֆեկտիվ լուծումը:

G.A. Kapanadze
The Problem of Plate Bending for double-connected region bounded by convex polygon and rectilinear cut

Рассматривается задача изгиба изотропной упругой пластинки для конечной двухсвязной области, ограниченной выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом. Предполагается, что на каждом звене внешней границы прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормально-изгибающими моментами, приложенными к планкам, а внутренняя граница оперта. Путем конформного отображения данной области на круговое кольцо, решение рассмотренной задачи построено в эффективном виде (в квадратурах).

§1. Конформное отображение двухсвязной области, ограниченной выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом, на круговое кольцо

Пусть S – двухсвязная область на плоскости z комплексной переменной, ограниченная выпуклым многоугольником (A) с границей L_0 и прямолинейным разрезом (B_1, B_2) с границей L_1.

Рассмотрим задачу:

Найти вид функции $z = \omega(\zeta)$, конформно отображающий круговое кольцо $D(1 < |\zeta| < R)$ на область S. Существование функции $\omega(\zeta)$ доказано в работе [1].

Обозначим через A_j $(j = 1,...,n)$ вершины (их аффиксы) многоугольника (A) и ось Ox направим вдоль отрезка (B_1, B_2). Точку $z = 0$ возьмем в середине отрезка (B_1, B_2). Величину внутренних углов области S при вершинах A_j обозначим через $\pi\alpha_j^0$ и положительным направлением на $L = L_0 \cup L_1 \left(L_0 = \bigcup\limits_1^n L_0^{(k)},\ L_0^{(k)} = A_k A_{k+1},\ k = 1,...,n, \right.$

$A_{n+1} = A_n$, $L_1 = \bigcup_1^2 L_1^{(k)}$, $L_1^{(1)} = B_1 B_2$, $L_1^{(2)} = B_2 B_1$) будем считать то, которое область S оставляет слева. Пусть $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ — углы между осью Ox и внешних нормалей контуров L_1 и L_0 в точке $t \in L$. Очевидно, что $\beta(t)$ и $\alpha(t)$ — кусочно-постоянные функции: $\beta(t) = \pi/2$, $t \in L_1^{(1)}$, $\beta(t) = -\pi/2$, $t \in L_1^{(2)}$, $\alpha(t) = \alpha_k$, $t \in L_0^{(k)}$, $(k = 1,...,n)$.

Легко заметить, что на $L_1^{(k)}$ и $L_0^{(k)}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[t \cdot e^{-i\beta(t)}\right] &= \operatorname{Re}\left[B(t)e^{-i\beta(t)}\right], \quad t \in L_1 \\ \operatorname{Re}\left[t \cdot e^{-i\alpha(t)}\right] &= \operatorname{Re}\left[A(t)e^{-i\alpha(t)}\right], \quad t \in L_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — кусочно-постоянные функции, $A(t) = A_k$ и $B(t) = B_k$ при $t \in L_0^{(k)}$ и $t \in L_1^{(k)}$.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ конформно отображает круговое кольцо $D(1 < |\zeta| < R)$ на область S. Будем считать, что окружность $l_1(|\zeta| = 1)$ отображается на L_1, а окружность $l_0(|\zeta| = R)$ — на L_0. Обозначим через a_k и b_k прообразы точек A_k и B_k и положительным направлением на $l = l_0 \cup l_1$ примем то, которое область D оставляет слева.

В силу условия (1.1) относительно функции $\omega'(\zeta) = d\omega / d\zeta$ получаем граничную задачу Римана-Гильберта для кругового кольца D

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[i\sigma \cdot e^{-i\beta(\sigma)}\omega'(\sigma)\right] &= 0, \quad \sigma \in l_1 \\ \operatorname{Re}\left[i\tau \cdot e^{-i\alpha(\tau)}\omega'(\tau)\right] &= 0, \quad \tau \in l_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Будем искать решение задачи (1.2) в классе $h(b_1, b_2)$ [2]. Индекс этой задачи данного класса равно нулю.

Граничные условия (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) - \overline{\chi(\sigma)} &= f_1(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \\ \chi(\tau) - \overline{\chi(\tau)} &= f_0(\tau), \quad \tau \in l_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$\chi(\zeta) = \ln \omega'(\zeta)$, $f_1(\sigma) = \ln\left(\sigma^{-2} e^{2i\beta(\sigma)}\right)$, $\sigma \in l_1$, $f_0(\tau) = \ln\left(R^2 \tau^{-2} e^{2i\alpha(\tau)}\right)$, $\tau \in l_0$.

Задача (1.3) представляет собой задачу Дирихле для кругового кольца. Необходимое условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$\int_0^{2\pi} f_1\left(e^{i\vartheta}\right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} f_0\left(\operatorname{Re}^{i\vartheta}\right) d\vartheta \tag{1.4}$$

В силу существования функции $\omega(\zeta)$ мы должны предположить, что условие (1.4) выполняется [1]. Этому условию можно придать вид

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_{k-1}^0} \cdot \prod_{j=1}^{2} b_j = 1 \tag{1.5}$$

Разлагая функцию $\chi(\zeta)$ в ряд Лорана

$$\chi(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\cdot\zeta^k,\quad (1<|\zeta|<R) \tag{1.6}$$

из граничных условий (1.3) относительно коэффициентов d_k получаем систему

$$R^{2k}d_k-\overline{d_{-k}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{R^{2k}f_0(\tau)}{\tau^k}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$d_k-\overline{d_{-k}}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f_1(\sigma)}{\sigma^k}\frac{d\sigma}{\sigma},\quad k=\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Im} d_0=-\frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} f_1(e^{i\vartheta})d\vartheta$$

Найдя из этой системы значения коэффициентов d_k и подставляя их в правую часть формулы (1.6), для функции $\chi(\zeta)$ получаем формулу

$$\chi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{f_0(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f_1(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{l_0}\frac{1}{R^{2k}-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\zeta^k}{\tau^k}-\frac{\tau^k}{\zeta^k}\right)\frac{f_0(\tau)}{\tau}d\tau+\int_{l_1}\frac{1}{R^{2k}-1}\cdot\left(\frac{\zeta^k}{\sigma^k}-\frac{\sigma^k}{\zeta^k}\right)\frac{f_1(\sigma)}{\sigma}d\sigma\right]+\overline{d_0}= \tag{1.8}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{l_0}\frac{f_0(\tau)d\tau}{\tau-R^{2k}\zeta}+\int_{l_1}\frac{f_1(\sigma)}{\sigma-R^{2k}\zeta}d\sigma\right]+\overline{d_0}=$$

$$=\ln\prod_{k=-\infty}^{\infty}G(R^{2k}\zeta)g(R^{2k}\zeta)R^2\zeta^{-2}R^{2\delta_k}+\overline{d_0}$$

где

$$G(\zeta)=\prod_{j=1}^{n}(\zeta-a_j)^{\alpha_j^0-1},\ g(\zeta)=\prod_{j=1}^{2}(\zeta-b_j),\ \delta_k=\begin{cases}0, & k\ge 0\\ 1, & k\le -1\end{cases}$$

Таким образом, для искомой функции $z=\omega(\zeta)$ получаем формулу

$$\omega(\zeta)=k_0e^{id_0^*}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{\zeta}{a_k}\right)^{\alpha_k^0-1}\prod_{k=1}^{2}\left(1-\frac{b_k}{\zeta}\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{R}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{\zeta}{R^{2j}a_k}\right)^{\alpha_k^0-1}\left(1-\frac{a_k}{R^{2j}\zeta}\right)^{\alpha_k^0-1}\prod_{k=1}^{2}b_k\cdot\left(1-\frac{\zeta}{R^{2j}b_k}\right)\times \tag{1.9}$$

$$\times\left(1-\frac{b_k}{R^{2j}\zeta}\right)d\zeta+\omega(\zeta_0)$$

где k_0 — произвольная действительная постоянная, ζ_0 — произвольная точка области D, $d_0^* = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_0^{2\pi} f_1(e^{i\theta})d\theta$.

§2.Задача изгиба пластинки для конечной двухсвязной области, ограниченной выпуклым многоугольником и прямолинейным разрезом

Пусть срединная поверхность изотропной упругой пластинки на плоскости z занимает конечную двухсвязную область S, рассмотренную в §1.

Предположим, что на каждом звене $L_0^{(k)}$ прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормально-изгибающими моментами, приложенными к планкам, а часть (B_1, B_2) оперта.

Рассмотрим задачу:

Найти прогиб $w(x,y)$ средней поверхности пластинки, если на каждом звене граничного контура L_0 известны значения главного изгибающего момента M_n.

Согласно приближенной теории изгиба пластинки прогиб $w(x,y)$ средней поверхности пластинки в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению [2,3]

$$\Delta^2 w(x,y) = 0, \quad z = x+iy \in S \tag{2.1}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} w = 0, \quad M_n(t) = 0, \quad t \in L_1 \\ \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad M_n(t) = f(t), \quad t \in L_0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

На основании известных формул [2], [3], сформулированная задача сводится к отысканию двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфных в области S, по следующим граничным условиям на L:

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}\left[ie^{-i\nu(t)}\left(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right)\right] = 0 \\ \mathrm{Re}\left[ie^{-i\nu(t)}\left(\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}\right)\right] = f_j(t), \quad t \in L_j, \ j = 0,1 \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$f_0(t) = \frac{1}{1-\sigma}\int\limits_0^t M_n(t)ds + C^{(0)}(t), t \in L_0, \ C^{(0)} = C_k^{(0)}, t \in L_0^{(k)}, \ f_1(t) = C^{(1)}(t)$$

$$t \in L_1, \ C^{(1)}(t) = C_k^{(1)}, \ t \in L_1^{(k)}, \ \nu(t) = \alpha(t), \ t \in L_0 \ \text{ и } \ \nu(t) = \beta(t), \ t \in L_1$$

Постоянные $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(0)}$ заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи таким образом, чтобы функции $\varphi(z)$ и $\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)$ были непрерывно продолжимы в области $S + L$ (функцию $\varphi(z)$ можно подчинить условию $\varphi(z_0) = 0$, где z_0 — некоторая точка области S).

Граничные условия (2.3) можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\left[ie^{-i\nu(t)}\varphi(t)\right] = F_j(t) \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Re}\left[ie^{-i\nu(t)}\left(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right)\right] = 0, \ t \in L_j, \ j = 0,1 \tag{2.5}$$

где $F_1(t)=\dfrac{C^{(1)}}{\kappa+1}$, $F_0(t)=\dfrac{1}{\kappa+1}\left[f_0(t)+c^{(0)}(t)\right]$ при $t\in L_1$ и $t\in L_0$ соответственно.

Пусть функция $z=\omega(\zeta)$ конформно отображает круговое кольцо $D\,(1<|\zeta|<R)$ на область S (см. §1).

Обозначая $\varphi(z)=\varphi[\omega(\zeta)]=\varphi_0(\zeta)$, из граничного условия (2.4) относительно функции $\chi(\zeta)=\zeta^{-1}\varphi_0(\zeta)$ получаем граничную задачу Римана-Гильберта для кругового кольца D

$$\begin{aligned}&\chi(\sigma)-e^{2i\beta(\sigma)}\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\overline{\chi(\sigma)}=\sigma^{-1}\psi_1(\sigma),\ \ \sigma\in l_1\\&\chi(\tau)-e^{2i\alpha(\tau)}\frac{\overline{\tau}}{\tau}\overline{\chi(\tau)}=\tau^{-1}\psi_1(\tau),\ \ \tau\in l_0\end{aligned}\tag{2.6}$$

где $\psi_1(\tau)=-2ie^{i\alpha(\tau)}F_1(\sigma)$, $\psi_0(\tau)=-2ie^{i\alpha(\tau)}F_0(\tau)$.

Функции $e^{2i\alpha(\tau)}$ и $e^{2i\beta(\sigma)}$ можно представить (см. §1) в виде

$$e^{2i\alpha(\tau)}=\tau\cdot\omega'(\tau)\left[\overline{\tau\cdot\omega'(\tau)}\right]^{-1},\ \ e^{2i\beta(\sigma)}=\sigma\cdot\omega'(\sigma)\left[\overline{\sigma\cdot\omega'(\sigma)}\right]^{-1}$$

где $\omega(\zeta)$ определена формулой (1.9). На основании этих формул граничные условия (2.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\Omega(\sigma)-\overline{\Omega(\sigma)}=\Theta_1(\sigma),\ \sigma\in l_1\\&\Omega(\tau)-\overline{\Omega(\tau)}=\Theta_0(\tau),\ \tau\in l_0\end{aligned}\tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}&\Omega(\zeta)=\varphi_0(\zeta)\cdot[\zeta\omega'(\zeta)]^{-1},\ \Theta_1(\sigma)=\sigma^{-1}\cdot\omega'^{-1}(\sigma)\cdot\psi_1(\sigma),\ \sigma\in l_1\\&\Theta_0(\tau)=\tau^{-1}\cdot\omega'^{-1}(\tau)\cdot\psi_0(\tau),\ \tau\in l_0\end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (2.7) имеет вид

$$\int_0^{2\pi}\Theta_1(\sigma)d\vartheta=\int_0^{2\pi}\Theta_0(\tau)d\vartheta\tag{2.8}$$

При выполнении этого условия, решение задача (2.7) представляется в виде

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=o}^{1}\int_{l_j}K(\zeta;t)\Theta_j(t)dt+c_1^{*}\tag{2.9}$$

где

$K(\zeta;t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{t-R^{2j}\zeta}$; c_1^{*} — произвольная действительная постоянная.

Таким образом, решение задачи (2.4) имеет вид

$$\varphi_0(\zeta)=-\frac{\zeta\cdot\omega'(\zeta)}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{l_1}\frac{e^{i\beta(\sigma)}c^{(1)}(\sigma)d\sigma}{\left(\sigma-R^{2k}\zeta\right)\overline{\sigma\omega'(\sigma)}}+\int_{l_0}\frac{e^{i\alpha(\tau)}\left[f_0(\tau)+c^{(0)}(\tau)\right]d\tau}{\left(\tau-R^{2k}\zeta\right)\overline{\tau\omega'(\tau)}}+c_1^{**}\right\}$$
$$\left(c_1^{**}=-\pi(\kappa+1)c_1^{*}\right)\tag{2.10}$$

а условие (2.8) записывается в виде

$$\int_{l_1}\frac{e^{i\beta(\sigma)}c^{(1)}(\sigma)}{\sigma\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma}+\int_{l_0}\frac{e^{i\alpha(\tau)}\left[f_0(\tau)+c^{(0)}(\tau)\right]}{\tau\omega'(\tau)}\frac{d\tau}{\tau}=0 \qquad (2.11)$$

Так как функция $\omega'(\zeta)$ в точках a_k имеет особенности вида $(\zeta-a_k)^{\alpha_k^0-1}$, то для непрерывной продолжимости функции $\varphi_0(\zeta)$ в $D+1$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{l_1}\frac{e^{i\beta(\sigma)}c^{(1)}(\sigma)d\sigma}{\left(\sigma-R^{2j}a_k\right)\sigma\omega'(\sigma)}+\int_{l_0}\frac{e^{i\alpha(\tau)}\left[f_0(\tau)+c^{(0)}(\tau)\right]}{\left(\tau-R^{2j}a_k\right)\tau\omega'(\tau)}d\tau+c_0^*\right\}=0$$

$$k=1,2,\cdots,n \qquad (2.12)$$

На основании результатов [2] относительно поведения интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности, можно доказать, что функция $\varphi'(z)$ вблизи точек B_k удовлетворяет условию $|\varphi'(z)|\sim M|z-B_k|^{-1/2}$, $(k=1,2)$, а вблизи точек A_m $(m=1,...n)$ она ограничена.

После того, как найдена функция $\varphi(z)$, для определения функции $\psi(z)$ воспользуемся условием (2.5), которое можно записать в виде [4]

$$\mathrm{Re}\left[ie^{i\nu(t)}\left(\psi(t)+p(t)\varphi'(t)\right)\right]=F_j^*(t),\ t\in L_j,\ j=0,1 \qquad (2.13)$$

где $F_j^*(t)=F_j(t)+\mathrm{Re}\left[ie^{i\nu(t)}\left(\bar{t}-p(t)\right)\varphi'(t)\right]$, $t\in L_j(j=0,1)$, $p(t)$ – определенный полином, удовлетворяющий условиям

$$P(B_k)=\overline{B}_k\ (k=1,2)$$

Так как $F_j(t)$ $(j=0,1)$ – ограниченные функции, решение задачи (2.13) строится аналогично решению задачи (2.4). Условие разрешимости задачи (2.13) совместно с условиями непрерывной продолжимости выражения $\psi(z)+p(z)\varphi'(z)$ и условиями (2.11), (2.12) дает для определения $n+4$ искомых действительных постоянных систему $n+4$ линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. Доказывается, что полученная система однозначно разрешима и, таким образом, рассмотренная задача имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. Конформное отображение многосвязных областей на канонические области //Усп. мат. наук. 1939. Вып.4. С.90-119.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
3. Лехницкий С.Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит //ПММ. 1938. Т.II. Вып.2. С.181-210.
4. Банцури Р.Д. Решение третьей основной задачи теории упругости для двухсвязных областей, ограниченных ломаными //Докл. АН СССР. 1978. Т.243. №4. С.882-885.

Тбилисский государственный
университет

Поступила в редакцию
27.09.2000