ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №1, 2001** Механика

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НА ВЕЛИЧИНУ РАСЧЕТНОЙ НАГРУЗКИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Гнуни В. Ц.

Վ. Ց. Գնունի
Ուղղանկյուն սալի հաշվարկային բեռի վրա Պուասոնի գործակցի ազդեցության մասին

Աշխատանքում ցույց է տրվում նորմալ բեռով բեռնավորված, չորս եզրերը հոդակապորեն ամրացված, իզոտրոպ, ուղղանկյուն սալի հաշվարկային բեռի վրա Պուասոնի գործակցի էական ազդեցությունը:

V. Ts. Gnuny
On the influense of Poisson`s Ratio on the value of calculation load of a rectangular plate

В работе показывается существенное влияние коэффициента Пуассона на определенной из условия прочности расчетную нагрузку, загруженной давлением q, шарнирно опертой по краям прямоугольной пластинки.

1. Пусть промоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z=0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Пластинка изготовлена из изотропного материала с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, пределом прочности или упругости $[\sigma]$, соответственно для хрупких или пластических материалов.

Прогиб пластинки под действием давления $q = q_0 \sin\pi x/a \sin\pi y/b$ определяется формулой [1]

$$w = \frac{12(1-\nu^2)a^4 q_0}{\pi^4 E h^3 (1+\lambda^2)^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \qquad (\lambda = \frac{a}{b}) \tag{1.1}$$

Напряжения $\sigma_{ij}(x,y,z)$ должны удовлетворять условию [2]

$$\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)} \le \sqrt{2}[\sigma] \tag{1.2}$$

При (1.1) направления в пластинке определяются формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{12a^2 q_0 (1+\nu\lambda^2)}{\pi^2 h^2 (1+\lambda^2)^2}\frac{z}{h}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\
\sigma_{22} &= \frac{12a^2 q_0 (\nu+\lambda^2)}{\pi^2 h^2 (1+\lambda^2)^2}\frac{z}{h}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \\
\sigma_{12} &= -\frac{12a^2 q_0 (1-\nu)\lambda}{\pi^2 h^2 (1+\lambda^2)^2}\frac{z}{h}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\sigma_{13}=\frac{6aq_0}{\pi h(1+\lambda^2)}\left(\frac{1}{4}-\frac{z^2}{h^2}\right)\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\sigma_{23}=\frac{6aq_0\lambda}{\pi h(1+\lambda^2)}\left(\frac{1}{4}-\frac{z^2}{h^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} \qquad (1.4)$$

$$\sigma_{33}=\frac{1}{2}\left[1+3\left(1-\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)\frac{z}{h}\right]q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

Из сравнения формул (1.3) и (1.4) вытекает, что σ_{13},σ_{23} и σ_{33} по сравнению с $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$ имеют порядок $\frac{h}{a}$ и $\frac{h^2}{a^2}$ соответственно, следовательно, в (1.2) можно пренебречь влиянием напряжений σ_{i3} $(i=1,2,3)$ с точностью $\frac{h^2}{a^2}$ по сравнению с единицей, что в пределах точности классической теории тонких пластинок.

При этом предположении условие (1.2) упрощается и представляется в виде

$$\sqrt{\sigma_{11}^{\ 2}+\sigma_{22}^{\ 2}-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2}\le[\sigma]$$

Подстановкой (1.3) в (1.5), для определения предельного значения приведенного параметра нагрузки

$$\bar{q}_0=\frac{6a^2q_0}{\pi^2h^2[\sigma]} \qquad (1.6)$$

получается

$$\bar{q}_0^*=(1+\lambda^2)^2\left[\sup_{(x,y,z)}\frac{2z}{h}\sqrt{F(x,y)}\right]^{-1} \qquad (1.7)$$

где введены обозначения

$$F(x,y)=c_1\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi y}{b}+c_2\cos^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi y}{b} \qquad (1.8)$$

$$c_1=(1-\nu+\nu^2)\lambda^4-(1-4\nu+\nu^2)\lambda^2+(1-\nu+\nu^2)>0,\ \ c_2=3(1-\nu)^2\lambda^2>0 \qquad (1.9)$$

В зависимости от значений коэффициента Пуассона ν и параметра отношения сторон пластинки λ

$$\sup_{(x,y,z)}\frac{2z}{h}\sqrt{F(x,y)} \qquad (x\in[0,a],\ \ y\in[0,b],\ \ z\in[-0.5h,0.5h])$$

достигается в точке $(0,\,0,\,0.5h)$ при $c_1<c_2$ и в точке $0.5a,0.5b,0.5h)$ при $c_1>c_2$, откуда

$$\bar{q}_0^*=\begin{cases}(1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_1} & \text{при } c_1>c_2\\ (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_1}\equiv(1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_2} & \text{при } c_1=c_2\\ (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_2} & \text{при } c_1<c_2\end{cases} \qquad (1.10)$$

2. Предварительно рассмотрим частный случай квадратной пластинки $(\lambda = 1)$. В этом случае

$$c_1 = (1+\nu)^2, \quad c_2 = 3(1-\nu)^2 \tag{2.1}$$

и из условия $c_1 = c_2$ при $0 \le \nu \le 0.5$ получается

$$\nu^* = 2 - \sqrt{3} \approx 0.27 \tag{2.2}$$

Таким образом,

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} 4/(1+\nu) & \text{при } 2-\sqrt{3} < \nu \le 0.5 \\ 4/(3-\sqrt{3}) & \text{при } \nu = \nu^* = 2-\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{3}(1-\nu) & \text{при } 0 \le \nu < 2-\sqrt{3} \end{cases} \tag{2.3}$$

В табл.1 приводятся значения приведенной расчетной нагрузки $\bar{q}_0^*$ для различных ν из отрезка $[0,0.5]$.

Таблица 1

ν	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	ν^*	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$\bar{q}_0^*$	2.31	2.43	2.57	2.72	2.89	3.08	3.15	3.08	2.96	2.86	2.76	2.67

Как видно из приведенных в табл.1 результатов, значение ν существенно влияет на величину расчетной нагрузки пластинки. В интервале $[0,\nu^*)$ несущая способность пластинки возрастает, а в $[\nu^*,0.5)$ убывает. Наибольшая несущая способность $\bar{q}_0^* = 3.15$ достигается при $\nu = \nu^* \approx 0.27$

3. Рассмотрим теперь случай $\lambda > 1$ и попытаемся найти ν^* в зависимости от λ.

Рассмотрим неравенство $c_1 > c_2$, которое представляется в виде

$$\lambda^4 - 2k\lambda^2 + 1 > 0 \tag{3.1}$$

где

$$k = \frac{2\nu^2 - 5\nu + 2}{\nu^2 - \nu + 1} \tag{3.2}$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned} &0 \le k < 1 && \text{при } 2-\sqrt{3} < \nu \le 0.5 \\ &k = 1 && \text{при } \nu = 2-\sqrt{3} \\ &1 < k \le 2 && \text{при } 0 \le \nu < 2-\sqrt{3} \end{aligned} \tag{3.3}$$

При $2-\sqrt{3} \le \nu \le 0.5$ $(0 \le k \le 1)$ неравенство (3.1) имеет место при любом $\lambda > 1$ и $\bar{q}_0^* = (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_1}$.

При $0 \le \nu < 2-\sqrt{3}$ $(1 < k \le 2)$ и $\lambda > 1$ уравнение

$$\lambda^4 - 2k\lambda + 1 = 0 \tag{3.4}$$

допускает корень

$$\lambda_* = \sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}} \tag{3.5}$$

т.е. возможно равенство $c_1 = c_2$.

Не вдаваясь в элементарные подробности, отметим, что при $0 \le \nu < 2-\sqrt{3}$

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_1} & \text{при} \quad \lambda > \lambda_* \\ (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_1} \equiv (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_2} & \text{при} \quad \lambda = \lambda_* \\ (1+\lambda^2)^2/\sqrt{c_2} & \text{при} \quad \lambda < \lambda_* \end{cases}$$

В частных случаях

а) при $\nu = 0.5 \quad (k=0)$

$$\bar{q}_0^* = (1+\lambda^2)^2/\sqrt{0.75(\lambda^4+\lambda^2+1)}$$

б) при $\nu = 0 \qquad (k=2), \quad \lambda_* = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$\bar{q}_0^* = \begin{cases} (1+\lambda^2)^2/\sqrt{\lambda^4-\lambda^2+1} & \text{при} \quad \lambda > \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ 6\sqrt{2+\sqrt{3}}/\sqrt{3} & \text{при} \quad \lambda = \lambda_* = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ (1+\lambda^2)^2/\sqrt{3}\lambda & \text{при} \quad \lambda < \sqrt{2+\sqrt{3}}\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Отметим, что при $\lambda < 1$

$\lambda_* = \sqrt{k-\sqrt{k^2-1}}$ при $\nu = 0$ получается, что $\lambda_* = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. и Вайновский-Крижр С. Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963. 635с.
2. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. II. Л.-М.: Гостехиздат, 1934. 320с.
3. Качанов Л.М. Теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.11. 2000