ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №4, 2000** Механика

УДК 62-50

ОГРАНИЧЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФАЗОВУЮ СКОРОСТЬ

Аветисян В.В.

Վ.Վ. Ավետիսյան

Գծային դինամիկական համակարգի սահմանափակ ղեկավարումը սահմանափակ ֆազային արագության դեպքում

Դիտարկվում է գծային դինամիկական համակարգը կամայական սկզբնական վիճակից տրված վերջնական վիճակ բերող ղեկավարման կառուցման խնդիրը, երբ առկա են սահմանափակումներ ղեկավարման և համակարգի ֆազային արագության վեկտորների կոմպոնենտների վրա: Համակարգի դինամիկական պարամետրերի համար ստացված են պայմաններ, որոնց դեպքում դիտարկվող խնդիրը լուծելի է տրված սահմանափակումներին բավարարող ցանկացած սկզբնական և վերջնական վիճակների համար:

V.V.Avetisyan

Constrained control of linear dynamic system with restrictions on velocity

Рассматривается задача построения управления, обеспечивающего переход линейной динамической системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние при ограничениях на компоненты вектора управления и вектора фазового состояния системы. Получены условия на динамические параметры системы, при которых поставленная задача разрешима для любых начальных и конечных состояний, удовлетворяющих наложенным ограничениям.

1. Рассматривается линейная управляемая динамическая система вида

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u \tag{1.1}$$

$$x(t_0)=x^0 \tag{1.2}$$

Здесь $x=(x_1,...,x_n)$-вектор фазовых координат, $u=(u_1,...,u_m)$-вектор управления, $A(t)$ и $B(t)$-вещественные кусочно-непрерывно зависящие от времени t матрицы размеров $n\times n$ и $n\times m$ соответственно.

Требуется построить управляющую вектор-функцию $u(t)$, осуществляющую переход системы из произвольного начального состояния в заданный момент $t=t_0$ (1.2) в произвольное конечное состояние в некоторый момент $t=T$

$$x(T)=x^1 \tag{1.3}$$

при условии, что на компоненты $u_i(t)$ и $\dot{x}_j(t)$ вектора управления $u(t)$ и вектора фазовой скорости $\dot{x}(t)$ при $t\in[t_0,T]$ наложены следующие ограничения:

$$|u_i(t)| \le b_i, \qquad b_i > 0,\ i = 1,...,m \tag{1.4}$$

$$|\dot{x}_j(t)| \le a_j, \qquad a_j > 0,\ j = 1,....,n \tag{1.5}$$

Запишем решение системы (1.1),(1.2)

$$x(t) = \Phi(t)\left[x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] \tag{1.6}$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная, определяемая условиями $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, $\Phi(t_0) = E_n$, E_n – единичная матрица размера $n \times n$.

Учитывая (1.3) и (1.6), задача сводится к отысканию такого управления $u(t)$, при котором удовлетворяются условие

$$\int_{t}^{T} \Phi^{-1}(t)B(t)u(t)dt = \Phi^{-1}(T)x^1 - x^0 \tag{1.7}$$

и ограничения (1.4), а соответствующее этому управлению фазовая скорость $\dot{x}(t)$ удовлетворяет ограничению (1.5) для всех $t \in [t_0, T]$.

2. Воспользуемся известным подходом [1] построения управления. Этот подход в [2,3] был распространен на случай наличия ограничения на управление – в задачах успокоения многочастотных систем линейных осцилляторов (маятников), скалярно управляемых, а в [4] на основе этих работ – при ограничениях (1.4).

Следуя указанному подходу, управление, решающее задачу без учета ограничений (1.4), (1.5), ищем в виде

$$u(t) = Q^T(t)C, \qquad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t) \tag{2.1}$$

где $C = (C_1,...,C_n)$ - постоянный вектор, определяемый из системы линейных алгебраических уравнений

$$R(T)\cdot C = \Phi^{-1}(T)x^1 - x^0, \qquad R(T) = \int_{t_0}^{T} Q(t)Q^T(t)dt \tag{2.2}$$

В случае полной управляемости системы (1.1), матрица $R(T)$ неособая [5] и поэтому (2.2) имеет единственное решение

$$C = R^{-1}(T)\cdot(\Phi^{-1}(T)x^1 - x^0) \tag{2.3}$$

Учитывая (2.1)-(2.3) и подставляя (2.1)-(2.3),(1.5) в (1.1), управление $u(t)$ и соответствующую ему фазовую скорость $\dot{x}(t)$ можно представить в следующем виде:

$$u(t) = F(t,T)\cdot(x^*)^T,\ F = (F^0, F^1)$$

$$\dot{x}(t) = G(t,T)\cdot(x^*)^T,\ G = (G^0, G^1);\ x^* = (x^0, x^1) \tag{2.4}$$

где элементы блочных матриц F и G определяются выражениями

$$F^0(t,T) = -(\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T), \quad F^1(t,T) = (\Phi^{-1}(t)B(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T)$$
$$G^0(t,T) = A(t)\Phi(t) - A(t)\Phi(t)R(t)R^{-1}(T) - B(t)B^T(t)(\Phi^{-1}(t))^T R^{-1}(T) \quad (2.5)$$
$$G^1(t,T) = A(t)\Phi(t)R(t)R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T) + B(t)B^T(t)(\Phi^{-1}(t))^T R^{-1}(T)\Phi^{-1}(T)$$

Пусть $f_{iq}^{0,1}$ и $g_{jq}^{0,1}$ – элементы матриц $F^{0,1}$ и $G^{0,1}$ соответственно. Введем обозначения

$$f_{iq}(t,T) = \begin{cases} f_{iq}^0(t,T), & q = 1,\dots,n \\ f_{iq}^1(t,T), & q = n+1,\dots,2n \end{cases}, \quad g_{iq}(t,T) = \begin{cases} g_{iq}^0(t,T), & q = 1,\dots,n \\ g_{iq}^1(t,T), & q = n+1,\dots,2n \end{cases}$$

$$x_q^* = \begin{cases} x_q^0, & q = 1,\dots,n \\ x_q^1, & q = n+1,\dots,2n \end{cases} \quad (2.6)$$

Тогда с учетом (2.5) и (2.6) искомое управление и соответствующую ему фазовую скорость можно представить в следующих координатных формах:

$$u_i(t) = \sum_{q=1}^{2n} f_{iq}(t,T)x_q^*, \quad i = 1,\dots,m;$$
$$\dot{x}_j(t) = \sum_{q=1}^{2n} g_{jq}(t,T)x_q^*, \quad j = 1,\dots,n \quad (2.7)$$

Решение $x(t)$ системы (1.1),(1.2) при управлении $u(t)$ с компонентами (2.7) для любого $T > 0$ удовлетворяет краевому условию (1.3). При этом, однако, построенное управление и соответствующая ему фазовая скорость не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (1.4) и (1.5). Для того, чтобы учесть эти ограничения, введем следующие функции:

$$S_i(t_0,T) = \left[\max_{t_0 \le t \le T} K_i(t_0,t,T)\right]^{-1/2}, \quad i = 1,\dots,m$$
$$M_j(t_0,T) = \left[\max_{t_0 \le t \le T} L_j(t_0,t,T)\right]^{-1/2}, \quad j = 1,\dots,n \quad (2.8)$$

где $K_i(t_0,t,T)$, $L_j(t_0,t,T)$ определяются из (2.6) и имеют вид

$$K_i(t_0,t,T) = \sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^2(t,T), \; i = 1,\dots,m; \; L_j(t_0,t,T) = \sum_{q=1}^{2n} g_{jq}^2(t,T), \; j = 1,\dots,n \quad (2.9)$$

К соотношениям (2.7) применим неравенство Коши-Буняковского

$$|u_i| \le \left(\sum_{q=1}^{2n} x_q^{*2}\right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{2n} f_{iq}^2(t,T)\right)^{1/2}, \quad i = 1,\dots,m$$
$$|\dot{x}_j| \le \left(\sum_{q=1}^{2n} x_q^{*2}\right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^{2n} g_{jq}^2(t,T)\right)^{1/2}, \quad j = 1,\dots,n \quad (2.10)$$

$$|u_i| \le |x^*| \left[K_i(t_0,t,T)\right]^{1/2} \le |x^*| S_i^{-1}(t_0,T), \qquad i=1,\dots,m$$
$$|\dot{x}_j| \le |x^*| \left[L_j(t_0,t,T)\right]^{1/2} \le |x^*| M_j^{-1}(t_0,T), \qquad j=1,\dots,n \qquad (2.11)$$

Из (2.11) следует,что наложенные ограничения (1.4) и (1.5) на компоненты векторов управления и фазовой скорости будут удовлетворены для всех $t \in [t_0, T]$, если время $T > 0$ выбирать из следующего условия:

$$|x^*| = \min_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} [b_i S_i(t_0,T),\ a_j M_j(t_0,T)] \qquad (2.12)$$

Таким образом, построение управления $u(t) = (u_1(t),\dots,u_m(t))$ осуществляется по следующей последовательности. Определяются элементы $f_{iq}^{0,1}$, $g_{jq}^{0,1}$ матрицы $F^{0,1}$, $G^{0,1}$ с помощью формул (2.1)-(2.6) и подсчитываются функции $S_i(t_0,T)$, $M_j(t_0,T)$ $i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$ с помощью (2.8),(2.9). Далее, для любых заданных t_0 и x^* из условия (2.12) находится время T, а затем определяются u_j, $j=1,\dots,m$ из (2.7).

3. Проиллюстрируем вышеизложенную схему построения управления для системы четвертого порядка

$$\ddot{\psi}_1 = u_1 - u_2,\ \ddot{\psi}_2 = u_2 \qquad (3.1)$$

$$|u_1(t)| \le b_1,\ |u_2(t)| \le b_2,\ b_2 = 1 \qquad (3.2)$$

$$|\dot{\psi}_1(t)| \le a_1,\ |\dot{\psi}_2(t)| \le a_2 \qquad (3.3)$$

Система (3.1)-(3.3) в безразмерной форме описывает движения различных механических моделей, в частности, плоские движения статически уравновешенным вторым звеном двузвенного манипулятора [6]. В (3.1)-(3.3) ψ_1, ψ_2 - обобщенные координаты (абсолютные углы в шарнирах манипулятора) , а a_1, a_2, b_1, b_2 - заданные безразмерные постоянные.

Определим управления $u_1(t), u_2(t)$ так, чтобы система (3.1) перешла из начального состояния покоя при $t = 0$

$$\psi_1(0) = 0, \dot{\psi}_1(0) = 0, \psi_2(0) = 0, \dot{\psi}_2(0) = 0 \qquad (3.4)$$

в заданное конечное состояние покоя при $t = T$

$$\psi_1(T) = \psi_1^1,\ \dot{\psi}_1(T) = 0,\ \psi_2(T) = \psi_2^1,\ \dot{\psi}_2(T) = 0 \qquad (3.5)$$

и при этом удовлетворялись ограничения (3.2),(3.3) для всех $t \in [0,T]$.

Пусть $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (\psi_1,\dot{\psi}_1,\psi_2,\dot{\psi}_2)^T$ –фазовый вектор системы (3.1). Представим уравнения (3.1) в общем виде (1.1)

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (3.6)$$

с постоянными матрицами A, B размеров 4x4, 4x2 и фундаментальной матрицей $\Phi(t)$ соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.7)$$

Начальные (3.4) и конечные (3.5) условия запишем в общем виде

$$x(0) = 0, \quad x(T) = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1)^T = (\psi_1^1, 0, \psi_2^1, 0)^T \qquad (3.8)$$

Замечание. Система (3.6),(3.7),(3.2) вполне управляема. Действительно, вместо (3.2) рассмотрим ограничение

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \le r, \;\; r = \min_i \, b_i, \;\; i = 1,2 \qquad (3.2')$$

Согласно [7], система (3.6),(3.7),(3.2') вполне управляема, так как имеет место условие Калмана [1] и $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0, i = 1,...,4,$ где λ_i - собственные числа матрицы A. Поскольку $W_0 \subset W_1$, где $W_0 = \{u : |u| \le r\}, \; W_1 = \{u : |u_i| \le b_i\}$, то вполне управляема и система (3.6),(3.7),(3.2).

Из (2.4) следует, что при построении управления достаточно вычислить элементы матриц F^1, G^1 (2.5). С помощью (3.7),(2.1)-(2.6) найдем

$$F^1 = \|f_{iq}^1\|, \quad i = 1,2; q = 1,...,4, \;\; f_{11}^1 = f_{13}^1 = f_{23}^1 = -12T^{-3}t + 6T^{-1}$$
$$f_{12}^1 = f_{14}^1 = f_{24}^1 = 6T^{-2}t - 2T^{-1}, \quad f_{21}^1 = f_{22}^1 = 0 \qquad (3.9)$$

$$G^1 = \|g_{jq}^1\|, \quad j = 1,...,4; q = 1,...,4, \;\; g_{11}^1 = g_{33}^1 = -6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t$$
$$g_{12}^1 = g_{34}^1 = 3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t, \quad g_{21}^1 = g_{43}^1 = -12T^{-3}t - 6T^{-2} \qquad (3.10)$$
$$g_{22}^1 = g_{44}^1 = 6T^{-2}t - 2T^{-1}, \; {}_{13}^{1} = g_{14}^1 = g_{23}^1 = g_{24}^1 = g_{31}^1 = g_{32}^1 = g_{41}^1 = g_{42}^1 = 0$$

Тогда для вспомогательных функций $S_i, i = 1,2$ и $M_j, j = 1,3$ из (2.8) будем иметь

$$S_1(T) = (72/T^4 + 32/T^2)^{-1/2}, \; S_2(T) = \sqrt{2}S_1, \; M_1(T) = M_3(T) = 2/3T \qquad (3.11)$$

Подставим $S_i, i = 1,2$ и $M_j, j = 1,3$ из (3.11) в условие (2.12), в котором, согласно (3.8), положим $|x^*| = \sqrt{(x_1^1)^2 + (x_3^1)^2}$. Из (2.12) получим уравнения для нахождения T. В зависимости от соотношений между параметрами задачи a_1, a_2, b_1, b_2 возможны следующие случаи:

1.1. $a_1 < a_2$, $b_1 < \sqrt{2}\, b_2$. Тогда, если $a)$ $b_1 > 8\sqrt{2}\, a_1 / 3$, то из (2.12) получим

$$|x^*| = \begin{cases} S_1(T), & T \in [0, T_{11}] \\ M_1(T), & T \in [T_{11}, \infty] \end{cases} \qquad (3.12,\ a)$$

где T_{11} определяется из равенства $S_1(T) = M_1(T)$

$$T_{11} = \left[288a_1^2 /(9b_1^2 - 128a_1^2)\right]^{1/2}$$

Поскольку функции S_i, M_j (3.11) монотонно возрастающие, то из уравнений (3.12, а) искомое время T определяется единственным образом

$$T = \left(\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 72b_1^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_1^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, T_{11}] \qquad (3.12,\ a1)$$

$$T = 3|x^*|/2a_1, \qquad T \in [T_{11}, \infty] \qquad (3.12,\ a2)$$

Если а) $b_1 > 8\sqrt{2}\, a_1/3$, то из (2.12) получим

$$|x^*| = S_1(T), \quad T \in [T, \infty] \qquad (3.12,\ b)$$

откуда с учетом (3.11) найдем

$$T = \left(\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 72b_1^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_1^2\right)^{1/2} \qquad (3.12,\ b1)$$

Нахождение времени T в остальных случаях производится аналогичным образом. Окончательно получаем

2.1. $a_1 < a_2,\ b_1 > \sqrt{2}\, b_2$

a) $b_2 > 8a_1/3$

$$|x^*| = \begin{cases} S_2(T), & T \in [0, T_{21}] \\ M_1(T), & T \in [T_{21}, \infty] \end{cases} \quad T_{21} = \left[144a_1^2 /(9b_2^2 - 128a_1^2)\right]^{1/2} \qquad (3.13,\ a)$$

$$T = \left(\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_2^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, T_{21}] \qquad (3.13,\ a1)$$

$$T = 3|x^*|/2a_1, \qquad T \in [T_{21}, \infty] \qquad (3.13,\ a2)$$

b) $b_2 < 8a_1/3$

$$|x^*| = S_2(T), \quad T \in [0, \infty] \qquad (3.13,\ b)$$

$$T = \left(\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_2^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, \infty] \qquad (3.13,\ b1)$$

1.3. $a_1 > a_2,\ b_1 < \sqrt{2}\, b_2$

a) $b_1 > 8\sqrt{2}\, a_2/3$

$$|x^*| = \begin{cases} S_1(T), & T \in [0, T_{13}] \\ M_3(T), & T \in [T_{13}, \infty] \end{cases} \qquad T_{13} = \left[288a_2^2/(9b_1^2 - 128a_2^2)\right]^{1/2} \tag{3.14, a}$$

$$T = \left(\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 72b_1^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_1^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, T_{13}] \tag{3.14, a1}$$

$$T = 3|x^*|/2a_2, \qquad T \in [T_{13}, \infty] \tag{3.14, a2}$$

$b)\quad b_1 < 8\sqrt{2}\, a_2/3$

$$|x^*| = S_1(T), \quad T \in [0, \infty] \tag{3.14, b}$$

$$T = \left(\left(16|x^*|^2 + \left(256|x^*|^4 + 36b_1^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_1^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, \infty] \tag{3.14, b1}$$

2.3. $a_1 > a_2,\ b_1 > \sqrt{2}\, b_2$

$a)\quad b_2 > 8a_2/3$

$$|x^*| = \begin{cases} S_2(T), & T \in [0, T_{23}] \\ M_3(T), & T \in [T_{23}, \infty] \end{cases} \qquad T_{23} = \left[144a_2^2/(9b_2^2 - 128a_2^2)\right]^{1/2} \tag{3.15, a}$$

$$T = \left(\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_2^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, T_{23}] \tag{3.15, a1}$$

$$T = 3|x^*|/2a_2, \qquad T \in [T_{23}, \infty] \tag{3.15, a2}$$

$b)\quad b_2 < 8a_2/3$

$$|x^*| = S_2(T), \quad T \in [0, \infty] \tag{3.15, b}$$

$$T = \left(\left(8|x^*|^2 + \left(64|x^*|^4 + 36b_2^2|x^*|^2\right)^{1/2}\right)/b_2^2\right)^{1/2}, \quad T \in [0, \infty] \tag{3.15, b1}$$

Таким образом, расчет управления можно провести по следующей последовательности. Пусть параметры задачи удовлетворяют одному из случаев $i.j.)\ (a)$, $i = 1,2;\ j = 1,3$. Разобьем весь полубесконечный интервал изменения T на две части: $[0, T_{ij}]$, $[T_{ij}, \infty]$, которым соответствуют два интервала изменения $|x^*|$: $\left[0, |x^*|_{ij}\right]$, $\left[|x^*|_{ij}, \infty\right.$. Здесь $|x^*|_{ij}$, $i = 1,2;\ j = 1,3$ определяются подстановкой в правые части уравнений (3.12, a,b)-(3.15, a,b) значений $T = T_{ij}, i = 1,2;\ j = 1,3$ из (3.12, a1,a2)-(3.15, a1,a2) соответственно. Далее, для фиксированного начального состояния $(t = 0,\ x^0 = 0)$ (3.8) по заданному конечному состоянию x^1, путем сравнения $|x^*|$ с $|x^*|_{ij}$

определяем, в каком из двух отрезков лежит искомое T. Если $T \in [0, T_{ij}]$, то T определяется одним из формул (3.12, a1)-(3.15, a1). Если $T \in [T_{ij}, \infty]$, то T определяется с помощью (3.12, a1)-(3.15, a1).

Если, же параметры задачи удовлетворяют одному из случаев $i.j.)$ (b), $i=1,2;\ j=1,3$, то по заданному x^1 время T на всем интервале изменения $[0,\infty)$, определяется единственным образом из уравнений (3.12,b)-(3.15,b) и выражается с помощью (3.12,b1)-(3.15,b1) соответственно.

Теперь для заданного начального и конечного состояний (3.8) компоненты управления в любой момент времени можно подсчитывать по формулам

$$u_1(t) = 6T^{-2}(1-2T^{-1}t)x_1^1 + 2T^{-1}(3T^{-1}t-2)x_2^1 +$$
$$+6T^{-2}(1-2T^{-1}t)x_3^1 + 2T^{-1}(3T^{-1}t-2)x_4^1$$
$$u_2(t) = 6T^{-2}(1-2T^{-1}t)x_3^1 + 2T^{-1}(3T^{-1}t-2)x_4^1$$

в которых время T определяется по формулам (3.12,a1,a2,b1)-(3.15, a1,a2,b1) согласно вышеизложенному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Об общей теории систем управления. Тр. I-го конгр. Междунар. федерации по автомат. управ-ю. (IFAC). М. : АН СССР, 1961. Т.2, с.521-547.
2. Черноусько Ф. Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4, с. 549-558.
3. Добрынина И. С., Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка.// РАН. Техн. Кибернет. 1992, № 6, с. 94-100.
4. Аветисян В.В. Ограниченное векторное управление линейной динамической системой.// Сб. науч. Тр. Конф. "Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем", Ереван, 1997, с. 13-17.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М. : Наука, 1968. 476с.
6. Аветисян В.В.,Болотник Н.Н.,Черноусько Ф.Л. Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора.// Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1985, № 3, с. 113-120
7. Brammer R. F. Controllability of linear autonomous systems with positive pastive controllers // SIAM J. on Control. 1972. V. 10, No 2.

Институт механики
НАН РА

Поступила в редакцию
23. 02. 2000