

УДК 539.1+532.5

СТАЦИОНАРНАЯ АККРЕЦИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА
С КОНИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Григорян С.Д.

Ս.Դ. Գրիգորյան

Իդեալական գազի ստացիոնար ակրեցիան կոնական հարվածային ալիքի հետ

Ստացված են ուժեղ կոնական հարվածային ալիքներով ստացիոնար լուծումներ, որոնք նկարագրում են իդեալական գազի ակրեցիան կենտրոնական ձգողության դաշտում: Ցույց են տրված իդեալական գազի կոնական հոսանքների առաջին ինտեգրալները: Հետազոտված են անորոշ տարածության մեջ լուծումների գոյության պայմանները:

S.D. Grigoryan

Stationary accretion of an ideal gas under a strong conical shock wave

Найдены стационарные решения с сильной конической ударной волной, описывающие аккрецию идеального газа на притягивающий центр. Указаны первые интегралы конических течений идеального газа. Исследованы условия существования решений, определенных во всем пространстве.

В многочисленных астрофизических явлениях возникает задача о стационарном обтекании массивной звезды потоком газа. В данной работе мы рассматриваем эту задачу при следующих предположениях: 1) масса звезды M много больше массы газа, расположенной в ее окрестности; 2) газ является идеальным; 3) радиус звезды R много больше ее гравитационного радиуса $R \gg r_g = 2GM/c^2$; 4) скорости движения газа $v \ll c$, где c — скорость света.

При такой идеализации задача сводится к исследованию стационарного движения идеального газа в поле притягивающего центра в классической ньютоновской теории, причем самогравитацией газа можно пренебречь. Мы предположим также, что движение газа обладает осевой симметрией и относится к классу так называемых конических решений, для которых в цилиндрических координатах r, φ, z все параметры газа существенно зависят только от одной переменной $\lambda = z/r$.

Стационарная аккреция газа при других предположениях изучалась в большом числе работ, обзор которых содержится в книге Зельдовича и Новикова 1971г. и в работе Сюняева 1978г. Конические течения газа без гравитации рассматривались впервые в классической работе Тейлора и Маккола 1944г. при изучении движения тела конической формы в воздухе. Эти решения применялись также Рудерманом и Шпигелем в 1971г. для моделирования движения газа в кильватерном следе, возникающем позади звезды, движущейся с постоянной скоростью через однородный газ. Исследование конических потоков газа в поле притягивающего центра впервые было начато в работе Бисноватого-Когана и др. в 1979г., где задача исследовалась, главным образом, численными методами. В данной

работе стационарная аккреция газа с конической ударной волной изучается с помощью строгих аналитических и геометрических методов.

§1. Стационарные конические течения газа в поле притягивающего центра.

Уравнения газовой динамики для стационарных решений с осевой симметрией в цилиндрических координатах r, φ, z имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, & v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{vw}{r} &= 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z, & \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\rho v}{r} &= 0 \\ v \frac{\partial(\rho \rho^\gamma)}{\partial r} + u \frac{\partial(\rho \rho^\gamma)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — радиальная, вертикальная и вращательная компоненты скорости газа, p — давление, ρ — плотность, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты. В рассматриваемой задаче F_r и F_z радиальная и вертикальная составляющие силы гравитационного притяжения массы M , расположенной в точке $r=0, z=0$:

$$F_r = -\frac{rGM}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad F_z = -\frac{zGM}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.2)$$

где G — гравитационная постоянная, $[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$.

Конические решения системы уравнений (1.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a}{r^s} R(\lambda), \quad p = \frac{ab^2}{r^s} r^{2k} P(\lambda), \quad v = br^k V(\lambda) \\ u &= br^k U(\lambda), \quad w = br^k \Omega(\lambda), \quad \lambda = \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где константы a и b имеют размерности $[a] = ML^{s-1}$, $[b] = L^{1-k} T^{-1}$, k и s — безразмерные константы; из условия конечности массы газа в окрестности центра получаем $s < 3$. Конические решения вида (1.3) при $k=0$ изучались впервые Тейлором и Макколом в качестве модели обтекания потоком газа тела конической формы.

Система уравнений (1.1) при условиях (1.2) имеют решения вида (1.3) только при одном значении $k = -1/2$. В этом случае из констант задачи G, M и b формируется одна безразмерная константа $m = GM/b^2$. Для исследования решений вида (1.3) удобно ввести угол $\theta = \arctg \lambda$ и использовать компоненту скорости V_r , направленную по лучу $\lambda = z/r = \text{const}$ и компоненту скорости V_n , направленную по нормали к V_r :

$$V_r = \frac{\lambda U + V}{(1 + \lambda^2)^{1/2}}, \quad V_n = \frac{U - \lambda V}{(1 + \lambda^2)^{1/2}} \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1) - (1.2) для решений вида (1.3) при преобразовании координат

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{(2m)^{1/2}} V_n (1 + \lambda^2)^{1/4}, \quad y = \frac{1}{(2m)^{1/2}} V_r (1 + \lambda^2)^{1/4} \\ \psi &= \frac{1}{(2m)^{1/2}} \Omega (1 + \lambda^2)^{1/4}, \quad z_0 = \frac{\gamma P}{m(\gamma - 1)R} (1 + \lambda^2)^{1/2} \\ \theta &= \arctg \lambda, \quad R \end{aligned} \quad (1.5)$$

переходит в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений по θ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} = x' &= - \frac{y \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{\gamma - 1}{2} z_0 \right) + x \operatorname{tg} \theta \left(\psi^2 + \frac{\gamma - 1}{2} z_0 \right)}{x^2 - \frac{\gamma - 1}{2} z_0} \\ y' &= \frac{1}{x} \left(x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \psi^2 + \left(\frac{3}{2} - \kappa \right) \frac{\gamma - 1}{2} z_0 - \frac{1}{2} \right) \\ \psi' &= \frac{\psi}{x} \left(x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} y \right) \\ \frac{z_0'}{z_0} &= -(\gamma - 1) \frac{x'}{x} + \frac{1}{2x} \left[(s - 3\gamma)y + 2(\gamma - 1)x \operatorname{tg} \theta \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

уравнение для функции R отделяется

$$\frac{R'}{R} = -\frac{x'}{x} + \frac{1}{x} \left[\left(s - \frac{3}{2} \right) y + (1 - s)x \operatorname{tg} \theta \right] \quad (1.7)$$

Здесь параметр $\alpha = 3/2 - (s + 1)/\gamma$. Замкнутая система уравнений (1.6) полностью определяет стационарные конические течения газа в поле притягивающего центра.

§2. Первые интегралы конических течений газа

Ряд первых интегралов системы (1.6) - (1.7) можно получить путем простых вычислений. Из уравнений для z_0' и R' непосредственно следует закон сохранения

$$F_1 = \left(z_0 (x \cos \theta)^{\gamma - 1} \right)^{3 - 2\gamma} \left(R x (\cos \theta)^{1 - \gamma} \right)^{\gamma - 3\gamma} = \text{const} \quad (2.1)$$

Этот интеграл аналогичен известному интегралу адиабатичности для автомодельных решений уравнений газовой динамики [6]. Интеграл (2.1) при $\gamma \neq 5/3$ позволяет выразить в явном виде функцию R через решение системы (1.6).

Из уравнений (1.6) для z_0' и ψ' получаем

$$F_2 = z_0 (x \cos \theta)^{\gamma-1} (\psi \cos \theta)^{5-3\gamma} = \text{const} \quad (2.2)$$

В силу интеграла F_2 функция ψ при $\gamma \neq 5/3$ выражается через z_0, x, θ и поэтому система (1.6) сводится к системе трех уравнений для функций x, y, z_0 .

Случай одноатомного газа $\gamma = 5/3$ для рассматриваемых решений является исключительным: при $\gamma = 5/3$ интегралы (2.1) и (2.2) сводятся к интегралу

$$F_3 = z_0 (x \cos \theta)^{2/3} = \text{const} \quad (2.3)$$

Интеграл F_3 также позволяет понизить порядок системы (1.6) на единицу.

Для нахождения более сложных интегралов системы (1.6) необходимо привлечь энергетические соображения¹¹. Оценим полное изменение энергии газа, заключенного в коническом секторе $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, в единицу времени.

Поток энергии в единицу времени через конус $\lambda = \text{const}$ равен

$$2\pi \int_0^{\infty} \varepsilon v_n r (1 + \lambda^2)^{1/2} dr$$

где $v_n = (u - \lambda v) / (1 + \lambda^2)^{1/2}$ — компонента скорости газа, ортогональная к поверхности конуса, ε — энергия единицы объема газа:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\gamma - 1} + \rho \frac{v^2 + u^2 + w^2}{2} - \frac{GM\rho}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

Работа, совершаемая газом против сил давления, равна

$$2\pi \int_0^{\infty} p v_n r (1 + \lambda^2)^{1/2} dr$$

Полное изменение энергии газа E внутри конического сектора $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2\pi \int_0^{\infty} (\varepsilon + p) v_n r (1 + \lambda^2)^{1/2} dr \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \\ &= 2\pi a b^2 \int_0^{\infty} R \left(\frac{\gamma p}{(1 - \gamma)R} + \frac{V_n^2 + V_t^2 + \Omega^2}{2} - \frac{m}{(1 + \lambda^2)^{1/2}} \right) v_n r^{-1/2} dr \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для стационарного течения газа $dE/dt \equiv 0$; отсюда следует сохранение интеграла (2.4), вычисленного при различных значениях λ . Однако интеграл в (2.4) в общем случае равен $\pm \infty$; только в специальном

¹¹ Закон сохранения энергии для исследования автомодельных решений впервые был применен Седовым [6]; новые применения этого закона, позволившие обнаружить автомодельные пульсации газа в звездах, были найдены Богоявленским [2,3].

случае, когда подынтегральное выражение в (2.4) равно нулю, проведенное рассуждение доказывает сохранение нулевого уровня функции

$$H = \frac{\gamma P}{(\gamma-1)R} + \frac{V_n^2 + V_t^2 + \Omega^2}{2} + \frac{m}{(1+\lambda^2)^{1/2}} \quad (2.5)$$

После преобразования в переменные (1.5) функция H принимает вид:

$$H = m(\cos\theta)H_0, \quad H_0 = z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 \quad (2.6)$$

Дифференцирование функции H_0 в силу системы (1.6) приводит к уравнению

$$H_0' = \frac{\gamma}{x} H_0 \quad (2.7)$$

Отсюда следует прямое доказательство сохранения траекториями системы (1.6) уровня $H = H_0 = 0$.

Из уравнения (2.7) и уравнения (1.6) для z_0' получаем первый интеграл

$$F_4 = z_0 (x \cos\theta)^{\gamma-1} H_0^{-(s-\gamma)/2} = \text{const} \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.7) и уравнения (1.6) для ψ' получаем первый интеграл

$$F_5 = H_0 \psi^2 \cos^2\theta = \text{const} \quad (2.9)$$

который при $\gamma \neq 5/3$ выражается через предыдущие интегралы

$$F_5 = (F_2 / F_4)^{2/(5-\gamma)}$$

В силу интегралов (2.2) и (2.8) функции z_0 и ψ при $\gamma \neq 5/3$ выражаются через x, y, θ и поэтому система четырех уравнений (1.6) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений на функции x, y . При $\gamma = 5/3$ такое же понижение порядка системы (1.6) достигается с помощью интегралов (2.3) и (2.9).

При значениях параметров γ, α , удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{3}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) = \frac{1}{2\gamma} (s+1)(\gamma-1) = 1 \quad (2.10)$$

или $s = (\gamma+1)/(\gamma-1)$ система (1.6) имеет еще один интеграл

$$F_6 = H_0 (H_0 + 1 - y^2) = (z_0 + x^2 + \psi^2)(z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1) = \text{const} \quad (2.11)$$

При выполнении условия (2.10) и $H_0 \neq 0$ три первых интеграла (2.8), (2.9) и (2.11) вместе с выражением H_0 (2.6) позволяет выразить x, y, z_0, ψ через H_0, θ . В результате этого система четырех уравнений (1.6) сводится к одному уравнению (2.7) после подстановки полученных выражений для x и y через H_0, θ .

§3. Стационарная аккреция газа с конической ударной волной

1. Поверхность $L = x^2 - \frac{\gamma-1}{2} z_0 = 0$ является поверхностью непродолжимости решений для системы (1.6). Действительно, с двух сторон производная x' обращается в $\pm\infty$ и меняет знак, поэтому траектории,

втекающие в поверхность $L=0$, могут быть продолжены при всех θ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) только с введением разрыва. Наличие у системы (1.6) поверхности непродолжимости решений $L=0$ является формальной причиной возникновения в стационарных конических течениях газа ударной волны, на которой $\lambda = z/r = \text{const}$. Фронт ударной волны в этих решениях имеет форму конуса. Поверхность $L=0$ делит пространство переменных x, y, z_0, ψ на "сверхзвуковую" область $L > 0$, где скорость газа V_n (ортогональная к поверхности конуса $\lambda = \text{const}$) больше скорости звука $v_0 = (dp/d\rho)^{1/2}$ и "дозвуковую" область $L < 0$, где $v_n < v_0$.

Условия Гюгонио сшивки решений на фронте ударной волны имеют, как известно, следующий вид:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad v_{1n} = v_{2n}, \quad p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$$

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} \quad (3.1)$$

Здесь индексы 1 и 2 определяют параметры газа по разные стороны от поверхности разрыва, величины v_n означают компоненты скорости, ортогональные к разрыву; касательные к разрыву компоненты скорости v_t не меняются.

После подстановки в (3.1) выражений (1.3)–(1.5) получаем условия на скачке:

$$R_1 x_1 = R_2 x_2, \quad y_1 = y_2, \quad \psi_1 = \psi_2$$

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{z_{01}}{x_1} + x_1^2 = z_{02} + x_2^2 \quad (3.2)$$

Отметим, что при преобразовании Гюгонио (3.2) величина

$$H_0 = z_0 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 \text{ сохраняется.}$$

II. Проведем построение стационарных решений, описывающих следующее явление. Пусть на массивное гравитирующее тело набегают поток холодного газа; в этом потоке возникает сильная коническая ударная волна, за которой температура газа существенно отлична от нуля; за фронтом ударной волны происходит аккреция газа на центр.

В случае сильной ударной волны можно считать, что газ перед фронтом ударной волны имеет нулевую температуру, то есть $z_{01} = 0$. Величины z_{01} и x_2 за фронтом ударной волны в силу (3.2) при $z_{01} = 0$ связаны условием

$$z_{02} = 4\gamma x_2^2 / (\gamma-1)^2 \quad (3.3)$$

В дальнейшем предположим, что в потоке газа отсутствует вращение ($\psi = 0$) и величина $H_0 = 0$. В этом случае система (1.6) после подстановки $z_0 = 1 - x^2 - y^2$ (в силу инвариантности условия $H_0 = 0$) сводится к

системе двух дифференциальных уравнений на функции x и y определенной внутри единичного круга $D^2: z_0 = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$ (фиг.1).

Система (1.6) при $z_0 = 0$ описывает стационарное движение холодного газа (пыли) и интегрируется в явном виде:

$$x = \sin\left(\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\right), \quad y = -\cos\left(\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\right) \quad (3.4)$$

Соответствующее точное решение имеет следующий вид:

$$v = -\frac{(2GM)^{1/2} \cos[(\theta + \theta_0)/2]}{(r^2 + z^2)^{3/4}}, \quad u = -\frac{(2GM)^{1/2} \sin[(\theta + \theta_0)/2]}{(r^2 + z^2)^{3/4}} \quad (3.5)$$

$$\rho = \frac{a \sin^{2(1-s)}[(\theta + \theta_0)/2]}{r(r^2 + z^2)^{(s-1)/2}}, \quad w = 0, \quad p = 0$$

В решении (3.5) плотность ρ и скорости u, v стремятся к нулю при $(r^2 + z^2) \rightarrow \infty$

Путем прямого вычисления нетрудно убедиться, что система (1.6) при $\theta \rightarrow \pi/2, H_0 = 0$ имеет решение S со следующей асимптотикой при $\theta \rightarrow \pi/2$:

$$x = \alpha \cos\theta, \quad y = -1 + \beta x^2, \quad z_0 = \frac{2}{k(\gamma - 1)} x^2 \quad (3.6)$$

где константы α, β, k выражаются через параметры γ, κ

$$\alpha = \frac{5 - 3\gamma}{4\gamma}, \quad \beta = \gamma \frac{4 + (\gamma - 1)(2\alpha - 3)}{2(5 + \gamma)(2\alpha - 3)(\gamma - 1)}, \quad k = 2 \frac{5 + \gamma(2\alpha - 3)}{5 - \gamma} \quad (3.7)$$

Асимптотика (3.6) имеет физический смысл при $k > 0$, что в силу (3.7) и $\kappa = 3/2 - (s+1)/\gamma$ при $\gamma < 5$ означает $s < 3/2$. Асимптотика (3.6) при $\alpha > 0 (\gamma < 5/3)$ описывает аккрецию на центр. При этом параметры газа при $\theta \rightarrow \pi/2$ ($\lambda = z/r \rightarrow \infty$) имеют следующий асимптотический вид:

$$v = -(2GM)^{1/2} \frac{5 + \gamma}{4\gamma} \frac{r}{z^{3/2}}, \quad u = -(2GM)^{1/2} \frac{1}{z^{1/2}}, \quad w = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho = a c_0 \frac{1}{r^2} \left(\frac{z}{r}\right)^{10 - (5 + \gamma)\lambda}, \quad p = 2a \frac{GM\alpha^2}{\gamma k} c_0 \frac{1}{r^{1+s}} \left(\frac{z}{r}\right)^{7 - (5 + \gamma)\lambda}$$

Частицы газа в асимптотике (3.8) падают в центр $r = z = 0$ по кривым

$$z = c_1 r^{4\gamma/(5 + \gamma)} \quad (3.9)$$

которые при $\gamma < 5/3$ касаются оси z . В асимптотике (3.9) при $\gamma < 5/3, s < 3/2$ плотность газа $\rho \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$; при $s < 7/(5 + \gamma)$ давление газа $p \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Траектория (3.4) (граница круга D^2) при преобразовании Гюгонио на ударной волне (3.2) переходит, в силу (3.3), в эллипс E_1 :

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2 x^2 + y^2 = 1 \quad (3.10)$$

Поверхность непродолжимости решений $L = x^2 - (\gamma-1)z_0/2 = 0$ в рассматриваемом случае проектируется в эллипс E_0 :

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} x^2 + y^2 = 1 \quad (3.11)$$

Очевидно, что при $\gamma > 1$ эллипс E_1 лежит внутри эллипса E_2 (фиг.1).

Траектория S , имеющая асимптотику (3.6), находится (в окрестности точки $Y_1(x=0, y=-1)$) в дозвуковой области $L < 0$ или внутри эллипса E_0 (3.11), при $k < 1$, что в силу (3.7) и $\kappa = 3/2 - (s+1)/\gamma$ означает $s > (1+\gamma)/4$. Траектория S находится (в окрестности точки Y_1) внутри эллипса E_1 при $\beta > \beta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^2$ и вне эллипса E_1 при $\beta < \beta_0$. Условие $\beta = \beta_0$ в силу (3.7) означает

$$s = s_0 = \frac{\gamma^2 + 6\gamma + 5}{8\gamma} \quad (3.12)$$

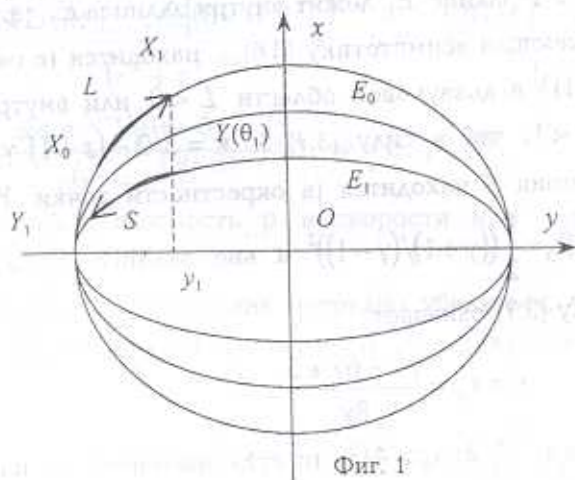
При $1 < \gamma < 5/3$ имеем $3/2 > s_0 > 4/3$, то есть значение s_0 находится в области физической применимости асимптотики (3.6) ($k > 0$, или $s < 3/2$). При изменении s в окрестности s_0 траектория S , имеющая асимптотику (3.6), переходит с одной стороны эллипса E_1 на другую. Поэтому при всех s в некоторой окрестности s_0 заведомо существует пересечение траектории S с эллипсом E_1 . Пусть это пересечение происходит при $\theta = \theta_1$ в точке $Y(\theta_1)$ с координатами (x_2, y_2) и пусть X_1 — точка с координатами (x_1, y_2) , переходящая в точку $Y(\theta_1)$ при преобразовании Югонио (3.2). Проведенные предварительные построения позволяют теперь перейти к конструкции искомого решения.

Стационарное движение газа с конической ударной волной в поле притягивающего центра описывается следующими двумя решениями. Фронт ударной волны является конусом $\theta = \theta_1$.

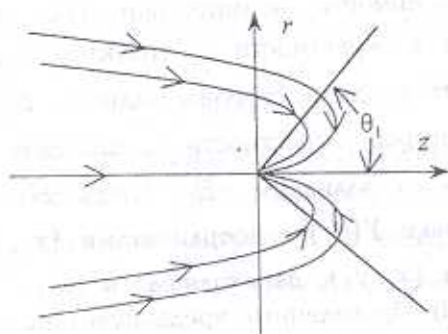
В области перед ударной волной при $-\pi/2 < \theta < \theta_0$ решение имеет вид (3.4) - (3.5), где $\theta_0 = (\theta_1 - 2 \arcsin x_1)$ и соответствует дуге L (от точки X_0 до X_1) на окружности $x^2 + y^2 = 1$ (фиг.1). Это решение описывает стационарное движение газа (холодного газа). В области за ударной волной при $\theta_1 < \theta < \pi/2$ решение описывается отрезком траектории S от точки $Y(\theta_1)$ до точки Y_1 (фиг.1). Траектория S , являющаяся решением системы (1.6) при $H_0 = 0, \psi = 0$, имеет при $\theta \rightarrow \pi/2$ асимптотику (3.6). Соответствующее стационарное решение имеет при $\lambda = z/r \rightarrow \infty$

асимптотику (3.8) и описывает аккрецию газа на притягивающий центр $z = r = 0$, касаясь линии (3.9), и плотность газа ρ на оси $r = 0$ равна ∞ . Траектории частиц в построенном решении показаны на фиг. 2.

Полученное решение допускает обобщение при $H_0 \neq 0$, $\psi \equiv 0$. При этом асимптотика решения при $\theta \rightarrow \pi/2$ по-прежнему имеет вид (3.6), из уравнения (2.7) находим асимптотику $H_0 = c(\cos \theta)^{4\gamma(5-3\gamma)} \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \pi/2$.



Фиг. 1



Фиг. 2

III. Отметим, что при $H_0 \leq 0$ и $\gamma \leq 5/3$ все стационарные решения вида (1.3) при наличии вращения газа ($\psi \neq 0$) существуют только на отрезке $|\theta| < \theta_0 < \pi/2$ и не продолжимы при $|\theta| \rightarrow \pi/2$. Действительно, в силу $z_0 \geq 0$ из условия $H_0 = z_0^2 + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 \leq 0$ следует $\{z_0, |x|, |y|, |\psi|\} \leq 1$. Поэтому в силу наличия первого интеграла (2.2) решение с $\psi \neq 0$, $H_0 \leq 0$ при $\gamma < 5/3$ не может существовать при $|\theta| \rightarrow \pi/2$. При $\gamma < 5/3$ в силу наличия интеграла (2.3) имеем

$$H_0 = \frac{F_3}{(x \cos \theta)^{2/3}} + x^2 + y^2 + \psi^2 - 1 > \frac{4(F_3/3)^{3/4}}{(\cos \theta)^{3/2}} - 1 \quad (3.13)$$

Поэтому при $\gamma = 5/3$ все стационарные решения вида (1.3) при $H_0 \leq 0$ (включая случай $\psi = 0$) не могут быть продолжены при $|\theta| \rightarrow \pi/2$.

При $\psi \neq 0$ и $H_0 > 0$ существуют решения, продолжимые при $|\theta| \rightarrow \pi/2$. Для всех таких решений в силу существования первого интеграла (2.9) имеем $H_0 \rightarrow \infty$ при $|\theta| \rightarrow \pi/2$.

При $\gamma = 5/3$ существуют решения, имеющие следующую асимптотику при $\theta \rightarrow \pi/2$:

$$x = \frac{(kF_3/3)^{3/8}}{(\cos\theta)^{1/4}}, \quad y = \frac{5x}{2\cos\theta}, \quad z_0 = \frac{F_3}{(x\cos\theta)^{2/3}}, \quad \psi = c_1(\cos\theta)^{1/4} \quad (3.14)$$

где $k = 1 - s$. Решения с асимптотикой (3.14) при $0 < s < 1$ могут быть использованы для моделирования стационарных движений газа в поле притягивающего центра, в которых частицы газа при $t \rightarrow \pm\infty$ уходят на бесконечность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бисноватый-Коган Г.С., Каждан Я.М., Клыпин А.А., Луцкий А.Е., Шакура Н.И. Аккреция на быстродвижущийся гравитирующий центр — *Астрономический журнал*, 1979, т.56, вып.2, с.359-367.
2. Бояжявленский О.И. Автомодельные пульсации газа в звездах — *Письма в АЖ*, 1978, 4, с.397.
3. Бояжявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980. 319с.
4. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. — *Теория и эволюция звёзд* — М.: Наука, 1971. 484с.
5. Ruderman M.A., Spiegel E.A. — *Astrophys. J.* 1971, vol.65, 1.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438с.
7. Сюняев Р.А. В сб. "Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes", 1978, LXV. Corso Soc. Italiana di Fisica, Bologna.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.01 2000