ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №4, 2000** Механика
УДК 539.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГИХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Минасян М. М.

Մ.Մ. Մինասյան
Քվազիլայնական ոչ գծային գրգռումների տարածումը առաձգական հաղորդիչ միջավայրերում

Աշխատանքում "կարճ" ալիքների տեսության օգնությամբ ուսումնասիրվել են ոչ գծային քվազիլայնական գրգռումների տարածումը անհամասեռ էլեկտրահաղորդիչ միջավայրերում: Հավասարումների սիմետրիկացման համար կիրառվել է Ֆրիդրիխսի մեթոդը: Լայնորեն օգտագործվել են ֆիզիկական և մաթեմատիկական բնույթի էվրիստական խիստ հիմնավորված մեթոդներ: Հաշվի են առնված նաև դիսպերսիայի և դիսիպացիայի տարբեր մեխանիզմներ:

M.M. Minassian
The Propagation of Nonlinear "Intermediate" Perturbations in Electrocondacting Elastic Medium

В работе исследуется распространение нелинейных квазипоперечных возмущений в проводящих средах. Учитываются начальная неоднородность среды, а также различные механизмы, порождающие дисперсию и диссипацию. Для вывода трехмерных уравнений распространения интенсивности волны применяется теория "коротких" волн с использованием метода Фридрихса симметризации гиперболических систем и ряда эвристических строгих методов физического и математического характеров ("малый" и "большой" принципы Гюйгенса, принцип инвариантности характеристических многообразий гиперболических систем, термодинамический принцип изменения энтропии на скачке, адиабатический закон распространения энергии возмущения и др.) для эффективного вычисления коэффициентов кубической нелинейности, дифракционного оператора и коэффициентов диссипации и дисперсии.

Основной метод вывода всех результатов базируется здесь на теории "коротких волн", разработанной в газовой динамике [1,2] и на обобщенной в работах автора [3,4,5] применительно к системам общего вида

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+A^{j}\frac{\partial u}{\partial x^{j}}=\sum_{\alpha=1}^{s}\prod_{\beta=1}^{\alpha+1}\left(B_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}+C_{\alpha}^{\beta j}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right)u \tag{1}$$

для функций $u(u_1,u_2,..u_n)$.

Теория "коротких волн" позволяет вывести из системы (1) одно уравнение, описывающее распространение одноволновых возмущений. Для интенсивности возмущения $\sigma(x_1,x_2,x_3,t)$ получается уравнение [14]

$$\frac{\partial}{\partial x_1}L[\sigma]=\xi_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\sum_{r\geq 3}\mu_r\frac{\partial^r\sigma}{\partial x_1^r},\qquad (\alpha,\beta=2,3)$$

$$L[\sigma]=\frac{\partial\sigma}{\partial t}+x_1\frac{d\ln U_n}{dt}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}+m_k\sigma^k\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}+\frac{\sigma}{2}\frac{d\ln R}{dt} \tag{2}$$

Уравнение записано в декартовой системе, связанной с линейным фронтом, представляющим одну из характеристических поверхностей единичной кратности.

Проблеме редукции систем уравнений к одному уравнению посвящено огромное число работ [1-14], в которых применены различные по схеме, но аналогичные по своей сути методы. Для термовязкомагнитоупругой среды, а также для других сред конкретные коэффициенты получены в работах А.Г. Багдоева. В его монографии [4] для поперечных волн уравнение вида (2) выведено не в полной мере, как это сделано для "быстрых" и "медленных" волн. В частности, это касается нелинейности, которая, как будет показано здесь, кубическая. Кроме того, здесь упрощены коэффициенты поперечного (дифракционного) оператора и рассмотрены другие модели термовязкоупругости.

Для сложных сред, когда число уравнений системы, следовательно, размерности векторов и матриц становятся непомерно великими, вычисление коэффициентов представляет громоздкий и утомительный труд. С другой стороны, имеется достаточное количество фактов физического и математического содержаний общего характера, эффективное использование которых позволяет существенно облегчить труд и построить окончательное уравнение, минуя многие промежуточные выкладки.

Отправной точкой является закон геометрической оптики [17]. Многие выкладки существенно упрощаются, если идеальная система (без правой части) симметрична и гиперболична. Процедура симметризации системы законов сохранения хорошо разработана в трудах С.К.Годунова [15], Фридрихса и Лакса [16]. Метод Фридрихса имеет то преимущество, что окончательная система записывается в терминах "начальных" функций u_i.

Для идеально проводящих тел без намагничивания и поляризации идеальная система уравнений содержит уравнение импульса, магнитной индукции и кинематики [18,19,20]. Проведя симметризацию по Фридрихсу в лагранжевом представлении, получим симметричную систему

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial F_{mn}} \frac{\partial F_{mn}}{\partial \xi^j} + \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial J}{\partial F_{kj}} \frac{\partial B_i}{\partial \xi^j} - \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial B_k}{\partial \xi^j} \tag{3}$$

$$\frac{J}{\mu_0} \frac{\partial B_i}{\partial t} = \frac{B_k}{\mu_0} \frac{\partial J}{\partial F_{kj}} \frac{\partial v_i}{\partial \xi^j} - \frac{B_i}{\mu_0} \frac{\partial v_k}{\partial \xi^j}, \qquad \frac{\partial L_{mn}}{\partial F_{ij}} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial L_{mn}}{\partial F_{ij}} \frac{\partial v_i}{\partial \xi^j}$$

с дополнительными соотношениями

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi^j}, \quad L_{ij} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial F_{ij}}, \qquad \mathrm{B}_j = J B_k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} = B_k \frac{\partial J}{\partial F_{kj}}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(\mathrm{B}_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \right), \qquad \frac{\partial \mathrm{B}_j}{\partial \xi_j} = 0 \quad J = \mathrm{Det} F_{ij} \tag{4}$$

Поскольку некоторые коэффициенты (в частности, коэффициент нелинейности) вычисляются из одномерных уравнений, то удобно ввести вектор "укороченной" дисторсии и соответствующий J по представлениям [19, 20]

$$f_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad J = \mathrm{Det}\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| = 1 + f_1 \tag{5}$$

Из характеристического уравнения линеаризированной идеальной системы уравнение поверхности нормалей для поперечной волны (I) получается в виде [4,18]

$$c_I^2\xi^2+\left(\vec{b}\vec{\xi}\right)^2=1,\quad c_I^2=2\rho_0\frac{\partial U}{\partial N},\quad \left(N=f_\tau^2,\ \vec{b}=\frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu_0 J\rho_0}}\right) \qquad (6)$$

Переходим к конкретизации коэффициентов уравнения трехмерных "коротких волн". Условия совместностей на линейном фронте для I волны имеют вид [18]

$$\vec{B}'=\sigma\left(\vec{B}\times\vec{n}\right),\qquad B_n\vec{f}'=\sigma J\left(\vec{B}\times\vec{n}\right),\qquad \vec{v}'=-c_I\vec{f}' \qquad (7)$$

При вычислении коэффициентов (2) будем пользоваться эвристическими методами, изложенными в [22].

Функция $R(t)$ определяется из принципа сохранения энергии в адиабатическом приближении:

$$\sigma^2R=\rho_0 v'^2c_I\Sigma=\frac{\rho_0c_I^3J^2B_\tau'^2\Sigma}{B_n^2}=\text{const}\ \text{вдоль лучей} \qquad (8)$$

где Σ — площадь поверхности фронта, ограниченной лучевой трубкой.

Коэффициенты поперечного оператора получаются из (6):

$$\xi_{22(33)}=-\frac{c_I^2}{c_I}\left(1+\frac{b_{2(3)}^2}{c_I^2}\right),\qquad \xi_{23}=-\frac{b_2b_3c_I^2}{c_I^3} \qquad (9)$$

Эти коэффициенты выведены также в [4], но в другой записи. Нетрудно показать, что после их упрощений они совпадают с (9). Как видно, поверхность нормалей выпукла наружу, и все точки ее эллиптические. Омбилических точек нет при произвольном магнитном поле. Для подтверждения мысли о том, что прямые выводы коэффициентов из системы могут стать источником появления случайных ошибок, укажем на работу [8], в которой коэффициент поперечного оператора не верен ни по значению (и для продольных волн), ни по знаку. Правильный коэффициент следует из (9) при отсутствии магнитного поля.

Теперь определим коэффициент нелинейности. Для рассматриваемой волны $m_1=0$ (исключительный случай), и поэтому следует удерживать в уравнении возмущений нелинейности более высокого порядка для уточнения условий совместности (7). Записав систему (3) в подвижной системе и интегрируя первое приближение с учетом соотношений (7), получим

$$f_n'\left(c_i^2-c_l^2-b_\tau^2\right)=\left(c_{1\tau\tau}-b_n^2\right)\frac{f_\tau'^2}{2},\qquad \left(c_{1\tau\tau}=\rho_0\frac{\partial^3U}{\partial f_n\partial f_\tau^2}\right) \qquad (10)$$

Коэффициент кубической нелинейности легче вычислить, используя условие Гюгонио на разрыве, которое имеет вид [19]

$$\rho_0[U]=\langle L_i\rangle\left[f_i'\right]-\frac{1}{4\mu_0}\left[f_n'\right]\left[B_\tau'\right]^2 \qquad (11)$$

Разлагая (11) по степеням возмущений и упрощая полученное соотношение в главных выражениях, получим

$$T_0 s' = \frac{1}{12} c_{,ijk} f_i' f_j' f_k' + \frac{1}{24} c_{,ijkl} f_i' f_j' f_k' f_l' - \frac{1}{4} f_n' f_\tau'^2 + \ldots$$

$$\left(c_i = \frac{\partial U}{\partial f_i}, \quad c_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial f_i \partial f_j}, \ldots \right) \tag{12}$$

Учитывая, что f_n' имеет порядок σ^2, а f_τ', b_τ' - порядок σ с учетом (7) и (10), из (12) получим

$$\rho_0 T_0 s' = \left[\frac{1}{8} \frac{\left(c_{,1\tau\tau} - b_n^2\right)^2}{c_l^2 - c_t^2 - b_\tau^2} + \frac{1}{24} c_{,\tau\tau\tau\tau} \right] f_\tau'^4 \tag{13}$$

Вычислив изменение полной энергии возмущения в объеме, заключенного внутри лучевой трубки между линейным фронтом и ударной волной и приписав это изменение скачку энтропии на ударной волне [14,22], получим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{m_2 R \sigma^4}{6 c_l} = -c_l T_0 \Sigma s' \tag{14}$$

Коэффициент m_2 определяется из (14) с учетом (8) и (13).

Поскольку при наличии магнитного поля

$$\frac{c_{,1\tau\tau}^2}{c_l^2 - c_t^2} > \frac{\left(c_{,1\tau\tau} - b_n^2\right)^2}{c_l^2 - c_t^2 + b_\tau^2} \tag{15}$$

то отсюда следует, что магнитное поле усиливает условие возрастания энтропии на (I) фронте разрыва.

В качестве примера рассмотрим нелинейную модель упругого изотропного тела, рассмотренного в [21]. Для внутренней энергии имеем разложение

$$\rho_0 U = \rho_0 T_0 s + \frac{\mu}{2} f_\tau^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \left(f_n^2 + f_n f_\tau^2 + \frac{1}{4} f_\tau^4 \right) +$$
$$\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{3}{4}\nu \right) f_n f_\tau^2 + \left(\frac{1}{4}\beta + \frac{3}{8}\nu \right) f_\tau^4 + \frac{\xi}{4} f_\tau^4 + \ldots \tag{16}$$

Из этого разложения следует

$$\frac{1}{24} c_{,\tau\tau\tau\tau} = \frac{\lambda + 2\mu}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{3}{8}\nu + \frac{\xi}{4} \tag{17}$$

При отсутствии магнитного поля этот результат совпадает с аналогичным результатом нейтральной среды [21]. Сравнивая значения скачка энтропии (13) со значением, полученным на основании (14), получим коэффициент m_2.

Теперь рассмотрим вопрос влияния различных факторов диссипативного и дисперсионного характеров на распространение возмущений.

Исходя из общей теории вывода уравнения "коротких" волн, сделаем ряд упрощающих предположений. Это в первую очередь относится к записи дополнительных слагаемых в одномерном представлении. Кроме этого, для вычисления указанных членов можно в равной степени пользоваться как лагранжевыми, так и эйлеровыми координатами, поскольку в линейном приближении обе переменные эквивалентны. По той же причине всеми нелинейностями в этих слагаемых пренебрегаем.

Из всех механизмов, порождающих диссипацию и дисперсию, как наиболее важные, будем рассматривать: влияние теплового поля; конечную электропроводность; вязкость, обусловленную зависимостью тензора напряжения от тензора скорости деформаций; вязкость, обусловленную памятью материала (теория наследственности).

Сначала рассмотрим влияние теплопроводности и конечной электропроводности. Уравнение теплопроводности примем в виде [18]

$$\rho_0 C\frac{\partial T}{\partial t}+T_0\beta\frac{\partial}{\partial t}\nabla.\vec{u}+\pi_0\nabla.\vec{J}=\lambda\Delta T+\frac{\mu_m}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)^2 \qquad (18)$$

Здесь C - удельная теплоемкость при постоянной деформации, T_0 - начальная температура, β-коэффициент температурных напряжений (теплового расширения), π_0-коэффициент влияния электрического тока на плотность теплового потока, λ – коэффициент теплопроводности, μ_m-коэффициент магнитной вязкости.

Закон Ома обобщается в виде [18]

$$\vec{J}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)-k_0\nabla T+\rho_e\vec{v} \qquad (19)$$

где σ -коэффициент электропроводности, k_0-коэффициент влияния теплового поля на плотность электрического тока и ρ_e-плотность свободных зарядов. В дальнейшем будем пренебрегать джоулевым теплом (последний член в (18)) и считать $\rho_e=0$.

Из (18) и (19) в "короткой волне" получается уравнение

$$-\rho_0 C\frac{\partial T'}{\partial x}-T_0\beta\frac{\partial f_n'}{\partial x}=\frac{\tilde{\lambda}}{c}\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}+\pi_0\sigma\vec{B}\left(\vec{n}\times\frac{\partial\vec{f}'}{\partial x}\right) \qquad (20)$$

Рассмотрим два предельных случая распространения тепла [24].

В адиабатическом приближении можно пренебречь первым членом в (20). Тогда, интегрируя оставшиеся члены, получим:

$$\frac{\partial T'}{\partial x}=-\frac{T_0\beta c}{\tilde{\lambda}}f_n'+\frac{\pi_0\sigma c}{\tilde{\lambda}}\vec{B}\left(\vec{n}\times\vec{f}'\right) \qquad (21)$$

В конечном итоге это уравнение, введя соответствующие обозначения, можно представить в виде

$$-\beta\frac{\partial T'}{\partial x}=\alpha_j f_j' \qquad (22)$$

В другом предельном изотермическом случае можно считать малым первый член в правой части в (20). Методом последовательных приближений получим:

$$\rho_0 C\frac{\partial T'}{\partial x}=-T_0\beta\frac{\partial f_n'}{\partial x}-\pi_0\sigma\vec{B}\left(\vec{n}\times\frac{\partial\vec{f}'}{\partial x}\right)+\frac{\tilde{\lambda}}{c}\left[T_0\beta\frac{\partial^2 f_n'}{\partial x^2}+\pi_0\sigma\vec{B}\left(\vec{n}\times\frac{\partial^2\vec{f}'}{\partial x^2}\right)\right] \qquad (23)$$

Введя соответствующие обозначения, (23) представим в виде

$$-\beta\frac{\partial T'}{\partial x}=\gamma_j\frac{\partial f'}{\partial x}-\delta_j\frac{\partial^2 f'}{\partial x^2},\quad\left(\delta_j=\frac{\gamma_j}{\rho_0 C}\right)\tag{24}$$

В уравнении импульса учет температурных напряжений будет отражен дополнительным членом $-\beta\frac{\partial T'}{\partial x}$ в правой части, а конечная проводимость—в уравнении индукции членом $\mu_m\frac{\partial^2 B'}{\partial x^2}$. Как видно, конечная проводимость порождает обычную высокочастотную вязкость, в то время как теплопроводность играет разные роли в двух рассмотренных предельных случаях. В первом, адиабатическом случае, приходим к выводу, что температурное поле не влияет на геометрию распространения слабых возмущений (лучи, бихарактеристики, линейный фронт, скорость распространения линейных возмущений), а также на качественные закономерности нелинейных возмущений (возникновение разрыва, скачок энтропии и т.д.). Влияние теплового поля здесь порождает низкочастотное рассеяние, как дополнительный эффект к рассеянию из-за неоднородности и геометрического расхождения лучей. В итоге функция Ψ заменяется произведением $\Psi\exp(-\nu t)$.

В изотермическом случае, подставив выражение (24) в уравнение импульса и объединив его с упругими напряжениями, получим

$$c_{ij}\frac{\partial f'_j}{\partial x}-\beta\frac{\partial T'}{\partial x}n_i=\tilde{c}_{ij}\frac{\partial f'_j}{\partial x}-\tilde{d}_{ij}\frac{\partial^2 f'_j}{\partial x^2}\qquad(\tilde{c}_{ij}=c_{ij}+\beta n_i\gamma_j,\qquad \tilde{d}_{ij}=\beta n_i\delta_j)\tag{25}$$

Если второе слагаемое в правой части (25) приводит к высокочастотному рассеянию, как обычная вязкость, то первое слагаемое приводит к пересмотру и геометрии распространения линейных возмущений и переучету всех коэффициентов одномерного уравнения "коротких "волн.

Для вязкоупругой среды, когда вязкость проявляется в виде зависимости вязких напряжений от тензора скоростей деформаций, исчерпывающие исследования содержатся в работах А.Г. Багдоева [4]. Результаты, полученные им, показывают, что тепловое поле может существенно влиять на все явления распространения нелинейных возмущений.

Для материала наследственного типа можно исходить из линейных соотношений [25]

$$\sigma_{ij}(t)=\int_0^t c_{ijkl}(t-\tau)\frac{\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau}d\tau\tag{26}$$

Будем считать, что ядро вольтеррового оператора содержит слагаемое с δ-особенностью (мгновенный упругий отклик) и регулярную часть наследственности. Кроме того, будем иметь в виду материалы с "короткой" памятью. Пусть α-характерное время релаксации. Будем считать ядра операторов быстро исчезающими при $t > \alpha$. Можно ввести высокочастотные и низкочастотные модули [26]. В силу сделанных предположений для девиатора напряжений и среднего давления получим

$$\delta s_{ij} = 2G_0 \delta e_{ij} + 2(G_\infty - G_0)\left[\delta \dot{e}_{ij} \alpha \int_0^\infty \xi \Gamma(\xi) d\xi - \frac{\delta \ddot{e}_{ij} \tau^2}{2} \int_0^\infty \xi^2 \Gamma(\xi) d\xi + \ldots\right]$$

$$-\delta p = K_0 \theta + (K_\infty - K_0)\left[\delta \dot{\theta} \tau \int_0^\infty \xi \Gamma_1(\xi) d\xi + \ldots\right] \qquad (27)$$

Действуя дальше аналогичным образом, как и в случае газовой динамики [26] и МГД [12], легко можно вычислить диссипативные и дисперсионные члены, при этом определенную роль сыграет разностный коэффициент.

Поскольку соотношения (26) и (27) линейны, то в итоге нелинейность механического поля будет носить геометрический характер из-за конечности деформаций. Можно, конечно, обобщить (27) и на случай физической нелинейности, представив G и K функциями от инвариантов тензора деформаций.

Автор благодарит А.Г. Багдоева за полезные советы и обсуждения ряда положений настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. - ПМТФ, 1960, N1.
2. Шефтер Г.М. Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородном движении жидкости. - ПММ, 1969, т.33, в.1.
3. Багдоев А.Г., Даноян З.Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания УВ в линейной и нелинейной постановках. - *Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ., 1972, №12, в.6.*
4. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах — Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1984.
5. Asano N., Ono H. Nonlinear dispersive or dissipative waves. - J. Phys. Soc., Japan, vol.31, N.6, 1971.
6. Taniuti T., Wei C.C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propogation.- J. Phys. Soc. Japan, 1968, v. 24.
7. Donato A. The Burgers equation in magneto-thermo-elasticity with one-dimensional deformation. - Z. Angew. Math. And Phys., 1976, 27, N2, 281-284.
8. Вальдек У.А., Энгельбрехт Ю.К. К вопросу асимптотического описания нелинейной продольной и поперечной волн деформаций в полупространстве - МТТ, 1986, №4, с.101-106.
9. Энгельбрехт Ю.К. Теория одномерных волн в нелинейных диссипативных средах. - "Механика полимеров", 1976, №1, с.41-46.

10. Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. - Таллин, Валгус, 1984, с.154.
11. Коробейников В.П. Распространение слабых МГД волн. - Магнитная гидродинамика, 1967, №2.
12. Минасян М.М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. - Докл.. АН Арм.ССР, 1972, т. LV, 2, №5, с.273-280.
13. Минасян М.М. Распространение слабых возмущений в бесстолкновительной плазме. - Уч. записки ЕГУ, 1975, 2.
14. Минасян М.М. Приближенные уравнения нелинейных волн в неоднородных движущихся средах с учетом диссипации и дисперсии. - Уч. записки. ЕГУ, 1978, 3, с.46-52.
15. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1978.
16. Friedrics K.O., Lax P.D. Systems of conservation equation with a convex extension, - Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68, 8, 1971, pp.1686-1688.
17. Jeffrey A. Quasilinear hyperbolic systems and waves. - Lond., San-Fr., Melb., Pitnam Publ., 1976.
18. Новацкий В.К. Электромагнитные эффекты в твердых телах.- М.: Мир, 1986.
19. Bazer J., Ericson W.B. Nonlinear wave motion in magnetoelasticity. - Arch. Rat. Mech. And Anal., 1974, 55, N2, pp.125-192.
20. Можен М. Механика электромагнитных сплошных сред. - М.: Мир, 1991.
21. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. — М.: Мир, 1972.
22. Минасян М.М. Эвристический подход в теории многомерных "коротких" волн в МСС. - В кн.: "Вопр. оптим. управл. и прочности мех. систем. Сб. научн. трудов., ЕГУ и НАН РА, 1997, с.154-159.
23. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. - М.: Физматгиз, 1962.
24. Engelbrecht J., Maugin G.A. Deformation waves in thermoelastic media and the concept of internal variables. - Arc. Appl. Mech. 66, 1996, pp.200-207.
25. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1978.
26. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.-М.: Наука, 1973.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
26.11.1999