ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №4, 2000 Механика

УДК 539.3

О ДВУХ ВАРИАНТАХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛАСТИНОК

Гнуни В.Ц.

Վ.Ծ. Գնունի
Սալերի հաշվարկային մոդելների երկու տարբերակների մասին

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ սալերի հաշվարկային մոդելները, որոնք հաշվի են առնում ընդլայնական սահքերի և նորմալ լարման ազդեցությունները, բնական է համատեղել սալի նորմալ տեղափոխության (ճկվածքի) ըստ հաստության փոփոխման ենթադրության հետ:

Դիտարկվում է նաև սալի հաշվարկի տարբերակ, որտեղ ենթադրվում է սալի հիմնական լարումների գծային օրենքով փոփոխությունը ըստ հաստության:

V.Ts. Gnuni
On the two variants of the plates calculation models

Настоящая работа, написанная по мотивам статей [1,2], имеет целью показать, что расчетные модели в теории пластинок, учитывающие влияние поперечных сдвигов и существенно дополняющие теорию Кирхгофа [3], было бы естественным совместить с предположением изменяемости нормального перемещения (прогиба) по толщине пластинки. В работе приводится вариант расчетной модели пластинки, свободной от предположений постоянства прогиба пластинки по толщине и малости поперечного нормального напряжения.

Следует отметить, что в настоящее время варианты расчетных моделей [4-9] вправе считаться классическими, так как содержат главную часть уточнений и дополнений к теории Кирхгофа. Однако, для строгости изложения следует отказаться также и от предположений равенства нулю поперечной деформации растяжения (сжатия) и малости поперечного нормального напряжения.

Во второй части работы приводятся уравнения теории пластин в напряжениях при предположении линейного изменения основных напряжений по поперечной координате.

1. Пусть упругая прямоугольная пластинка размерами a, b, h отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает с срединной плоскостью пластинки. Пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала и плоскости $z = \text{const}$ совпадают с плоскостями изотропии материала. Трансверсально-изотропное тело характеризуется техническими постоянными E, ν, $G = E/2(1+\nu)$, E', G', ν'', $\nu' = \nu'' E'/E$.

Перемещения произвольной точки (x, y, z) пластинки представляются в виде

$$u_1 = u - z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_1\right), \quad u_2 = \text{v} - z\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_2\right), \quad u_3 = w + z\varphi_3 - \frac{z^2\varphi}{2} \tag{1.1}$$

где $u(x, y)$, $\text{v}(x, y)$, $w(x, y)$ — искомые перемещения срединной плоскости пластинки, $\varphi_i(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — искомые функции.

При $\varphi_i(x, y) \equiv 0$, $\varphi(x, y) \equiv 0$ получаются соотношения классической теории пластинок, основанные на гипотезе Кирхгофа.

На основе (1.1) для поперечных деформаций сдвига получаются

$$\varepsilon_{13}=\varphi_1+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-\frac{z^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varepsilon_{23}=\varphi_2+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}-\frac{z^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (1.2)$$

Из условий отсутствия касательных напряжений σ_{13},σ_{23} на лицевых поверхностях $(z=\pm 0{,}5h)$ пластинки получается

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}=0,\ (\varphi_3=\text{const}),\ \varphi_1=\frac{h^2}{8}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi_2=\frac{h^2}{8}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

следовательно,

$$u_1=u-z\frac{\partial}{\partial x}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right),\ u_2=\mathrm{v}-z\frac{\partial}{\partial y}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right),\ u_3=w+z\varphi_3-\frac{z^2\varphi}{2} \qquad (1.3)$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right),\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}-z\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}-2z\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \ \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (1.4)$$

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)+\frac{\nu''}{1-\nu}\sigma_{33}$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)+\frac{\nu''}{1-\nu}\sigma_{33}$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right)-\frac{Ez}{(1+\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)$$

$$\sigma_{13}=\frac{1}{2}G'\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \ \sigma_{23}=\frac{1}{2}G'\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (1.5)$$

Поперечное нормальное напряжение σ_{33} определяется из третьего уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0 \qquad (1.6)$$

Интегрированием уравнения (1.6) по z и удовлетворением условий $\sigma_{33}\big|_{z=0.5h}=0,\ \ \sigma_{33}\big|_{z=-0.5h}=-q(x,y)$

получается

$$\sigma_{33}=-\frac{1}{2}\left[1-\frac{z}{h^3}\left(3h^2-4z^2\right)\right]q \qquad (1.7)$$

и уравнение для определения искомой $\varphi(x,y)$

$$\Delta\varphi=-\frac{12}{G'h^3}q(x,y) \qquad (1.8)$$

Из соотношений для напряжений (1.5) для усилий и моментов получаются

$$T_{11}=C\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\nu''h}{2(1-\nu)}q,\ T_{22}=C\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\nu''h}{2(1-\nu)}q$$

$$T_{12}=\frac{1-\nu}{2}C\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

$$M_{11}=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)+\frac{\nu''h^2}{10(1-\nu)}q$$

$$M_{22}=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)+\frac{\nu''h^2}{10(1-\nu)}q$$

$$M_{12}=-(1-\nu)D\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right) \tag{1.10}$$

$$T_{13}=\frac{G'h^3}{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ T_{23}=\frac{G'h^3}{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1.11}$$

где $C=\dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Усилия и моменты удовлетворяют уравнениям равновесия во внутренних усилиях и моментах, откуда получаются:
для обобщенного плоского напряженного состояния

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{(1+\nu)\nu''}{2E}\frac{\partial q}{\partial x}\\ \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+=\frac{(1+\nu)\nu''}{2E}\frac{\partial q}{\partial y}\end{gathered} \tag{1.12}$$

для задачи изгиба

$$D\Delta^2 w=q-\left[\frac{E}{8(1-\nu^2)G'}-\frac{\nu''}{10(1-\nu)}\right]h^2\Delta q \tag{1.13}$$

к которым добавляется также уравнение (1.8)

$$\Delta\varphi=-\frac{12}{G'h^3}q \tag{1.14}$$

К системе уравнений (1.12)-(1.14) необходимо присоединить граничные условия:

а) заделанный край $x=\text{const}$

$u=v=0$ — для плоской задачи,

$$w-\frac{h^2}{24}\varphi=0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(w-\frac{h^2}{8}\varphi\right)=0 \tag{1.15}$$

— для задачи изгиба,

б) свободный край

$T_{11} = T_{12} = 0$ – для плоской задачи,

$M_{11} = 0,\ M_{12} = 0,\ T_{13} = 0$ – для задачи изгиба (1.16)

в) условия Навье $(\sigma_{11} = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0)$

– свободно опертый край

$T_{11} = 0,\ \mathrm{v} = 0$ – для плоской задачи,

$$w - \frac{h^2}{24}\varphi = 0,\ M_{11} = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(w - \frac{h^2}{8}\varphi\right) = 0 \text{ – для задачи изгиба.} \tag{1.17}$$

2. Представляет интерес получение уравнения теории тонких пластинок в напряжениях.

Пусть напряжения $\sigma_{ij}(x,y,z)\ (i=1,2)$ изменяются по толщине по линейному закону

$$\sigma_{ij} = a_{ij}(x,y) + z b_{ij}(x,y)\ \ (i,j=1,2) \tag{2.1}$$

где a_{ij}, b_{ij} – шесть искомых функций.

Из уравнений равновесия теории упругости в напряжениях и из условий на лицевых поверхностях пластинки

$$\sigma_{i3}(x,y,\pm h/2) = 0\ (i=1,2),\ \sigma_{33}(x,y,h/2) = 0,\ \sigma_{33}(x,y,-h/2) = -q(x,y) \tag{2.2}$$

получается

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{12}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 b_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 b_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b_{22}}{\partial y^2} = -\frac{12}{h^3}q(x,y) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial x} + \frac{\partial b_{12}}{\partial y}\right),\ \sigma_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\left(\frac{\partial b_{12}}{\partial x} + \frac{\partial b_{22}}{\partial y}\right)$$
$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{z}{h^3}\left(3h^2 - 4z^2\right)\right]q(x,y) \tag{2.5}$$

Пусть

$$a_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},\ a_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},\ a_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$
$$b_{11} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \varphi,\ b_{22} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \varphi,\ b_{12} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \tag{2.6}$$

где $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ – искомые функции, тогда уравнения (2.3) удовлетворяются тождественно, а из (2.4) получается уравнение для определения искомой функции $\varphi(x,y)$

$$\Delta\varphi = -\frac{12}{h^3}q(x,y) \tag{2.7}$$

В силу (2.1), (2.5), (2.6) и из обобщенного закона Гука для напряжений и деформаций получаются

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi + z\Psi) + z\varphi,\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi + z\Psi) + z\varphi,\ \sigma_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Phi + z\Psi)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \sigma_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{2.8}$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{z}{h^3}\left(3h^2 - 4z^2\right)\right]q(x,y)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\nu''}{2}q\right) + \frac{z}{E}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-\nu)\varphi - \frac{\nu''}{h^3}(3h^2 - 4z^2)q\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\nu''}{2}q\right) + \frac{z}{E}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + (1-\nu)\varphi - \frac{\nu''}{h^3}(3h^2 - 4z^2)q\right]$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G'}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{2E'}\left[1 - \frac{z}{h^3}(3h^2 - 4z^2)\right]q - \frac{\nu''}{E}\Delta(\Phi + z\Psi) - \frac{2\nu''}{E}z\varphi$$

Из уравнения совместности

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x\partial y} \tag{2.10}$$

Для определения искомых $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ получаются уравнения

$$\Delta^2\Phi = -\frac{\nu''}{2}\Delta q \tag{2.11}$$

$$\Delta^2\Psi = \frac{12(1-\nu)}{h^3}\left(1 + \frac{\nu'' h^2}{10(1-\nu)}\Delta\right)q \tag{2.12}$$

Таким образом, уравнение (2.11) характеризует обобщенное плоское напряженное состояние, а уравнения (2.7), (2.12) – изгиб пластинки. Формулами (2.8), (2.9) определяется напряженное и деформированное состояние пластинки. По деформациям пластинки (2.9) можно с точностью жесткого смещения и поворота определить перемещения произвольной точки пластинки и рассматривать краевые задачи изгиба пластинки.

Необходимо отметить, что граничные условия на краях пластинки будут удовлетворены интегрально по координате z.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. О теории тонких пластин //Изв.АН РА, МТТ, 1992, №3, с.26-47.
2. Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин //Изв.АН РА, МТТ, №3, с.65-72.
3. Kirchhoff G. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastiscen Scheibe //J.Reine Angew, Math. 1850, Bd.40, S.51-58.
4. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates //J.Math. and Phys. 1944, v.23, '4, p.184-191.
5. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. //Trans. ASME. 1945, v.67, p.A69-A77.
6. Hencky H. Uber die Berucksishugung in ebenen Platten //Jng. Arch. 1947, Bd.16, HI, S.72-76.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин —М.: Физматгиз, 1987, 360с.
8. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты //Вестник МГУ, 1957, №2.
9. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок //Изв. ОТН АН СССР, 1958, №5.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.03.2000