ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №4, 2000 Механика

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕН СТРИНГЕР КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Григорян Э.Х.

Է.Խ.Գրիգորյան

Անվերջ առաձգական սալի, որի վրա սոսնձված է վերջավոր երկարության ստրինգեր, խնդրի լուծման մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է կոնտակտային խնդիր անվերջ առաձգական սալի վերաբերյալ, որի վրա իր ամբողջ երկարությամբ սոսնձված է վերջավոր ստրինգեր: Խնդիրը հանգեցվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որի աջ մասը համընկնում է խնդրի լուծումը, երբ սալը բացարձակ կոշտ է: Այնուհետև տրվում է խնդրի պարամետրերի ճշգրիտ գնահատական, որոնց դեպքում ստացված ինտեգրալ հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորության և անվերջ հավասարումների սիստեմի մեթոդներով:

E.Kh.Grigoryan

On solution of problem for an elastic infinite plate, on the surface of which finite length stringer is glued

В работе рассматривается контактная задача о передаче нагрузки от стрингера конечной длины к упругой бесконечной пластине. Причем стрингер по всей своей длине контакта приклеен к пластине. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, правая часть которого является решением задачи, соответствующей жесткой пластине. Далее дается точная оценка параметров задачи, при которых полученное интегральное уравнение можно решать с помощью методов последовательных приближений и бесконечных систем уравнений.

Рассматривается задача о передаче нагрузки от стрингера конечной длины к упругой бесконечной пластине. Причем стрингер по всей своей длине приклеен к пластине. Вопрос заключается в определении контактных касательных напряжений, когда сила приложена к концу $x = L$ стрингера.

Обсуждаемая задача ранее рассматривалась в работе [1] (здесь сила приложена к концу x=0 стрингера), где задача свелась к решению интегрального уравнения

$$Q(x) - \beta^2 \int_0^x (x-u) Q(u)\,du - \gamma^2 \int_0^1 \ln|x-u| Q(u)\,du - K = -\beta^2 x, \quad 0 \le x \le 1 \qquad (1)$$

где K определяется из условия $\int_0^1 Q(u)\,du = 1$.

$$K = u_0 GbL / P\eta + \gamma^2 \ln L, Q(x) = q(x)L/P, \beta^2 = GbL^2/\eta E_1 A$$

$\gamma^2 = GbL(1+\nu)(3-\nu)/4\pi\eta E_2 t$; b, L, A, E_1–ширина, длина, площадь поперечного сечения и модуль упругости материала стрингера соответственно; η, G–толщина и модуль сдвига материала клея соответственно, t, ν, E_2–толщина, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала пластины соответственно, u_0–неизвестная постоянная, P–величина силы, приложенной к концу $x = L$ стрингера, $q(x) = b\tau(x)$, $\tau(x)$–контактные касательные напряжения.

Далее решение уравнения (1) ищется в виде

$$Q(x)=Q_0(x)+Q(0)\left[1+\gamma^2(x\ln x-x)\right]+Q(1)\left[1+\gamma^2(1-x)\ln(1-x)-(1-x)\right]+R(x)$$

где $Q_0(x)=\beta\operatorname{ch}\beta(L-x)/\operatorname{sh}\beta$ является решением задачи в случае жесткой пластины.

В работе [2], где опять рассматривается эта задача, решение уравнения (1) строится с помощью ортогональных многочленов Чебышева второго рода.

1. Получение интегрального уравнения задачи. Относительно стрингера принимается модель контакта по линии, т.е. допускается, что контактные силы сосредоточены по длине средней линии контактного участка, а относительно пластины полагается, что во время деформации она находится в условии обобщенного плоского напряженного состояния. В таком случае

$$u_2(x,0)=\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4E_2t\pi}\int_0^L\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+u_0\right)q(s)ds \tag{2}$$

где $u_2(x,0)$–горизонтальное перемещение точки пластины при $y=0$, а остальные обозначения те же, что и выше.

Далее, полагая, что слой клея находится в условии чистого сдвига [1], получим

$$u_1(x)-u_2(x,0)=\gamma_k\eta,\quad q(x)=b\tau(x)=bG\gamma_k, \tag{3}$$

где $u_1(x)$–перемещение точки стрингера, γ_k–деформация сдвига слоя клея, $\tau(x)$–касательные напряжения в слое клея. В силу вышесказанного, относительно стрингера будем иметь:

$$\frac{d^2u_1(x)}{dx^2}=\frac{1}{E_1A}q$$

Имея в виду, что (3)

$$q(x)=\frac{[u_1(x,0)-u_2(x,0)]bG}{\eta}$$

окончательно получим

$$\frac{d^2u_1(x)}{dx^2}-\alpha^2u_1=-\alpha^2u_2 \tag{4}$$

где $\alpha^2=bG/\eta E_1A$.

Отметим, что должны иметь место и граничные условия

$$\frac{du_1}{dx}\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{du_1}{dx}\Big|_{x=L}=\frac{P}{E_1A} \tag{5}$$

Решение граничной задачи (4), (5) ищем в виде

$$u_1(x)=A_1\operatorname{ch}\alpha x+B_1\operatorname{sh}\alpha x+\overset{0}{u}(x)$$

где $\overset{0}{u}(x)$ является решением уравнения (4) при нулевых граничных условиях, т.е. в (5) надо положить $P=0$. $\overset{0}{u}(x)$ определяется в виде

$$\overset{0}{u}(x)=\alpha^2Au_2$$

где

$$Au_2 = \int_0^L k(x,s) u_2(s) ds$$

$$k(x,s) = \frac{1}{2\alpha \operatorname{sh}\alpha L} \begin{cases} \operatorname{ch}[\alpha(L-x-s)] + \operatorname{ch}[\alpha(L-x+s)] & x > s \\ \operatorname{ch}[\alpha(L-x-s)] + \operatorname{ch}[\alpha(L+x-s)] & x < s \end{cases}$$

Очевидно, что $k(x,s)$ –непрерывная функция и $k(x,s) = k(s,x)$.
Далее, удовлетворив граничным условиям (5), будем иметь

$$u_1(x) = \overset{0}{u}_1(x) + \alpha^2 \int_0^L k(x,s) u_2(s) ds \tag{6}$$

где

$$\overset{0}{u}_1(x) = \frac{P \operatorname{ch}\alpha x}{E_1 A \alpha \operatorname{sh}\alpha L}$$

Теперь, имея в виду (3), из (6) получим

$$\frac{\eta}{bG} q(x) + u_2(x) = \alpha^2 \int_0^L k(x,s) u_2(s) ds + \overset{0}{u}_1(x) \tag{7}$$

Тогда, в силу того, что имеем равенство (2), уравнение (6) запишется в виде

$$q(x) + \gamma^2 \left(\int_0^L \ln\frac{1}{|x-s|} q(s) ds - \alpha^2 \int_0^L k(x,s) \int_0^L \ln\frac{1}{|s-\tau|} q(\tau) d\tau ds \right) = -\gamma^2 u_0 \int_0^L q(s) ds +$$

$$+ \alpha^2 \gamma^2 u_0 \int_0^L k(x,s) ds \cdot \int_0^L q(s) ds + \frac{bG}{\eta} \overset{0}{u}_1 \tag{8}$$

Здесь обозначения γ^2, b, G, η, u_0 те же, что и во второй странице.

Для дальнейшего заметим, что спектром симметрического оператора $D = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2$, областью определения которого являются дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $(du/dx)_{x=0} = 0$, $(du/dx)_{x=L} = 0$, являются собственные значения $\lambda_n = \alpha^2 + \frac{n^2\pi^2}{L^2} (n = 0,1,2,...)$, а соответствующими собственными функциями являются функции $\cos(n\pi x/L)$. С другой стороны, как известно [3], самосопряженный вполне непрерывный оператор A является обратным оператором оператора D. Это означает, что

$$A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^L k(x,s) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds = \frac{L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (n = 0,1,2) \tag{9}$$

Теперь, после замены в (8) x на Lx, а s – на Ls, получим

$$q(x) + \gamma^2 L \left(\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|} q(s) ds - \alpha^2 L \int_0^1 k(x,s) \int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|} q(\tau) d\tau\, ds \right) = -\gamma^2 u_0 \int_0^L q(s) ds +$$

$$+ \alpha^2 \gamma^2 u_0 \int_0^L q(s) ds \int_0^L k(x,s) ds + \gamma^2 L \int_0^1 q(s) ds \ln L - \ln L \gamma^2 \alpha^2 L^2 \int_0^1 k(Lx, Ls) ds + \overset{0}{u}_1(Lx). \tag{10}$$

Если теперь учесть (9), из (10) окончательно получим искомое интегральное уравнение:

$$p(x)+\gamma^2 L\int_0^1 \Pi(x,s)p(s)ds = p_0(x), \quad 0\le x\le 1 \tag{11}$$

где

$$p(x)=q(xL), \quad \Pi(x,s)=\ln\frac{1}{|x-s|}-\alpha^2 L\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}k(x,\tau)d\tau$$

$$p_0(x)=\frac{P\alpha \operatorname{ch}\beta x}{\operatorname{sh}\beta}, \quad \beta=\alpha L, \quad 0\le x\le 1$$

Легко видеть из (11), что $p_0(x)$ является решением задачи в случае жесткой пластины, т.е. решением уравнения (11) при $E_2\to\infty$, а также ограниченность $p(x)$ при $x\to 0$ и $x\to 1$.

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро интегрального уравнения квадратично интегрируема по двум переменным, правой частью которого является решение поставленной задачи в случае жесткой пластины. В отличие от уравнения (1), здесь неизвестная постоянная отсутствует. Кроме того, надо отметить, что при выводе уравнения (11) мы нигде не пользовались условием равновесия

$$\int_0^1 p(s)ds=\frac{P}{L} \tag{12}$$

Надо полагать, что (12) удовлетворяется автоматически в уравнении (11), поскольку

$$\int_0^1 p_0(s)ds=\frac{P}{L}$$

Действительно, если уравнение (11) записать в виде

$$p(x)+\gamma^2 L\left(\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-x|}p(s)ds-\alpha^2 L\int_0^1 k(x,s)\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}p(\tau)d\tau ds\right)=p_0(x), 0\le x\le 1 \tag{13}$$

при этом учитывая, что

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}p(s)ds=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\pi x, \quad 0\le x\le 1$$

и имея в виду (9), получим

$$\int_0^1\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}p(s)dsdx-\alpha^2 L\int_0^1\int_0^1 k(x,s)\left(\int_0^1 \ln\frac{1}{|s-\tau|}p(\tau)d\tau\right)dsdx=0 \tag{14}$$

откуда и будет следовать наше утверждение

2. Решение уравнения (11) методом последовательных приближений.

Очевидно, что

$$\int_0^1 \Pi^2(x,s)ds\le C_1 \tag{15}$$

где C_1 - некоторая постоянная.

Известно [4], что при условии (15) последовательные приближения уравнения (11) равномерно сходятся при всех значениях $\gamma^2 L$, которые удовлетворяют неравенству

$$d\gamma^2 L < 1,\ d^2 = \int_0^1\int_0^1 \Pi^2(x,s)dxds$$

Здесь вопрос стоит об оценке величины d, которая, по-видимому, представляет определенный интерес. Для этого уравнение (13), которое равносильно уравнению (11), представим в виде

$$p(x) + \gamma^2 LBCp(x) = p_0(x),\ 0 \le x \le 1$$

где оператор B действует по формуле

$$B\varphi = \varphi - \alpha^2 L\int_0^1 k(x,s)\varphi(s)ds$$

а оператор C действует по формуле

$$C\varphi = \int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}\varphi(s)ds,\ 0 \le x \le 1$$

Тогда

$$BC\varphi = \int_0^1 \Pi(x,s)\varphi(s)ds$$

Рассматривая уравнение (11) в $L_2(0,1)$, будем иметь

$$\|BC\|^2 = \int_0^1\int_0^1 \Pi^2(x,s)ds\,dx = d^2$$

Теперь оценим норму оператора BC, т.е. $\|BC\| = d$. Поскольку оператор $B = I - \alpha^2 A$, а спектр оператора A–это числа $\frac{L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2\pi^2}$, то спектром оператора В будут числа $1 - \frac{\alpha^2 L^2}{\alpha^2 L^2 + n^2\pi^2}$. Отсюда следует (поскольку оператор В самосопряженный), что норма оператора В равна единице, т.е $\|B\| = 1$. Значит $\|BC\| \le \|C\|$.

Следовательно, уравнение (11) можно решать методом последовательных приближений при $\gamma^2 L < \frac{1}{\|C\|}$,

где

$$\|C\| = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 \ln^2|x-s|dxds} = \frac{\sqrt{14}}{2} \qquad (16)$$

3. Решение уравнения (11) методом бесконечных систем.

Решение уравнения (11) ищем в виде

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos m\pi x \tag{17}$$

Тогда, имея в виду (9), (14), уравнение (11) можно свести к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений

$$b_m+\gamma^2 L^2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2\pi^2+\alpha^2 L^2}K_{mn}b_n=\frac{2P\alpha\beta\cos m\pi}{\beta^2+m^2\pi^2}, m=1,2,... \tag{18}$$

где

$$K_{mn}=\int_0^1\int_0^1 \ln\frac{1}{|x-s|}\cos m\pi x dx\cos n\pi s ds$$

$$\int_0^1 p_0(s)\cos m\pi s ds=\frac{P\alpha\beta\cos m\pi}{\beta^2+m^2\pi^2}, m=0,1,2,...$$

Квазиполная регулярность системы (18) следует из (15) [4]. Она имеет место при $\gamma^2 L<\frac{1}{\|C\|}$ (16). Причем ряд (17) сходится равномерно [4].

В конце отметим, как оказалось выше (в отличие от работы [1] (1)), решение задачи $q(x)$ не содержит постоянную u_0. Этого надо было ожидать, поскольку, как известно, напряженное состояние в плоской задаче теории упругости не зависит от постоянной плоской задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L., Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet. - J. of Mech. and Applied Math., vol.XXIII, Pt.4, 1970.
2. Саркисян В.С., Керопян А.В. Решение задачи для анизотропной полуплоскости, на границе которой приклеена накладка конечной длины // Юбилейная науч. конф., посв. 60-летию основания пед. института им. Налбандяна, Сб. науч. трудов, т.1, "Высшая школа" Гюмри, 1994, с. 73-76.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс.-М.: Гостехиздат, 1961.
4. Михлин С.Г. Интегральные уравнения.- М.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.

Ереванский
госуниверситет

Поступила в редакцию
24.12.1999