ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №4, 2000 Механика

УДК 517.43

О ВЫПУКЛОСТИ СЛЕДОВ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Локшин А.А., Сагомонян Е.А.

Ա.Ա. Լոկշին, Ե.Ա. Սագոմոնյան

Պարամետրից կախված կիսասահմանափակ ինքնահամալուծ օպերատորների հետքերի ուռուցիկության մասին

Հոդվածում ապացուցվում է թեորեմ, որը որոշակի պայմաններում ապահովում է պարամետրից կախված ներքևից կիսասահմանափակ ինքնահամալուծ օպերատորների հաջորդական սեփական արժեքների գումարների պարամետրական ուռուցիկությունը:

A.A. Lokshin, E.A. Sagomonyan

About concavity of traces of semi-bounded self-adjoint operators depending on a parameter

В заметке устанавливается теорема, гарантирующая при определенных условиях параметрическую выпуклость сумм последовательных собственных значений полуограниченных операторов, зависящих от параметра.

Пусть $\mathscr{H}$ — абстрактное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot,\cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть далее, $H = H(a)$ — полуограниченный снизу самосопряженный оператор, действующий в $\mathscr{H}$; $a = (a_1,...a_n)$ — параметр, изменяющийся в некоторой выпуклой области $G \subseteq R^n$. Область определения $D(H(a))$ оператора $H(a)$ считаем, вообще говоря, зависящей от a, однако, предполагаем, что существует такое не зависящее от a линейное подпространство D_0 пространства $\mathscr{H}$, на котором $H(a)$ существенно самосопряжен при каждом $a \in G$. Нам понадобится следующее

о п р е д е л е н и е. Оператор $H(a)$ (удовлетворяющий перечисленным выше условиям) называется **существенно выпуклым** вверх по параметру a в области G, если для любых $a, b \in G$ и любого элемента $u \in D_0$ справедливо неравенство

$$\left\langle H\left(\frac{a+b}{2}\right)u, u\right\rangle \geq \frac{\langle H(a)u,u\rangle + \langle H(b)u,u\rangle}{2} \tag{1}$$

Т е о р е м а. Пусть $H(a)$ — полуограниченный снизу самосопряженный опратор, существенно выпуклый вверх по параметру $a \in G$ (G — выпуклая область в R^n). Пусть, далее, нижняя часть спектра оператора $H(a)$, $a \in G$ является чисто дискретной и состоит из собственных значений $E_i(a)$, $i = 1,2,...$, которые мы считаем занумерованными в порядке возрастания с учетом кратности. Положим

$$S_k(a)=E_1(a)+E_2(a)+...+E_k(a), \qquad k=1,2,... \tag{2}$$

Тогда при $a\in G$ все функции $S_k(a)$ выпуклы вверх.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что справедливо равенство [1]

$$S_k(a)=\inf\sum_{i=1}^{k}\langle H(a)u_i,u_i\rangle \tag{3}$$

где инфимум берется по всем ортонормированным наборам $u_1,u_2,...,u_k\in D(H(a))$. Далее, пусть $a,b\in G$ и пусть

$$H\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_i=E_i\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_i, \quad i=1,2,...,k$$

где $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера). В силу существенной самосопряженности оператора $H\left(\frac{a+b}{2}\right)$ на D_0 для любого $\tilde{\varepsilon}>0$, очевидно, найдутся такие $v_1,v_2,...,v_k\in D_0$, что

$$\|v_i-\varphi_i\|<\tilde{\varepsilon}, \quad \left\|H\left(\frac{a+b}{2}\right)v_i-E_iv_i\right\|<\tilde{\varepsilon}, \quad (i=1,2,...,k)$$

Ортонормируя набор $v_1,v_2,...,v_k$, легко замечаем, что справедливо следующее утверждение: для любого $\varepsilon>0$ найдется ортонормированный набор $w_1,w_2,...,w_k\in D_0$ такой, что

$$\left|S_k\left(\frac{a+b}{2}\right)-\sum_{i=1}^{k}\left\langle H\left(\frac{a+b}{2}\right)w_i,w_i\right\rangle\right|<\varepsilon$$

В частности, отсюда следует, что

$$S_k\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\sum_{i=1}^{k}\left\langle H\left(\frac{a+b}{2}\right)w_i,w_i\right\rangle-\varepsilon \tag{4}$$

Теперь, используя существенную выпуклость оператора H, имеем из (4):

$$S_k\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle H(a)w_i,w_i\rangle+\sum_{i=1}^{k}\langle H(b)w_i,w_i\rangle\right)-\varepsilon$$

Далее, учитывая ортонормированность набора $\{w_i\}$ и соотношение (3), имеем из предыдущего неравенства

$$S_k\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{S_k(a)+S_k(b)}{2}-\varepsilon$$

переходя здесь к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем требуемый результат.

Замечание. В случае полуограниченного самосопряженного оператора, линейно зависящего от параметра a, с областью определения, не зависящей от этого параметра, выпуклость вверх функций $S_k(a)$ была установлена в [1].

Приведем пример, иллюстрирующий действие доказанной выше теоремы. Рассмотрим в $L_2\left(R_x^1\right)$ следующее одномерное уравнение Шредингера, зависящее от параметра λ $(\lambda > 1)$:

$$H(\lambda)\varphi \equiv \left[-\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \lambda x^{2n}\right]\varphi = E(\lambda)\varphi \tag{5}$$

(здесь n — натуральное, $n > 1$). Как известно [2], оператор $H(\lambda)$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty\left(R_x^1\right)$. Поэтому в силу предыдущей теоремы функции $S_k(\lambda)$ выпуклы вверх; здесь, как и выше, через $S_k(\lambda)$ обозначены суммы последовательных собственных значений рассматриваемого оператора.

Однако, для операторов с потенциалами, состоящими из конечных сумм однородных функций, можно получать и более сильные утверждения. Действительно, сделаем в (5) замену, положив

$$x = a^\gamma y, \quad \lambda = a^\beta \tag{6}$$

где a — вещественный скалярный параметр, γ и β — вещественные постоянные, которые будут определены ниже. Тогда (5), очевидно, перепишется следующим образом:

$$\widetilde{H}(a)\varphi \equiv \left[-\frac{1}{a^{2\gamma}}\frac{d^2}{dy^2} - a^{2\gamma}y^2 + a^{2n\gamma+\beta}y^{2n}\right]\varphi = E\left(a^\beta\right)\varphi \tag{7}$$

Очевидно, что оператор $\widetilde{H}(a)$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty\left(R_y^1\right)$; он будет существенно выпуклым по a, если будет удовлетворяться одна из двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le -2\gamma \le 1 \\ 2\gamma \le 0 \\ 0 \le 2n\gamma + \beta \le 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \le -2\gamma \le 1 \\ 2\gamma \ge 1 \\ 0 \le 2n\gamma + \beta \le 1 \end{cases} \tag{8}$$

В частности, решением первой из этих систем служит

$$\gamma = 1/2, \ \beta = n+1 \tag{9}$$

Итак, при условии (9) оператор $\widetilde{H}(a)$ из левой части (7) является существенно выпуклым по a (при $a > 1$, ибо $a = \lambda^{1/(n+1)}$). Теперь из (7) и (9) в силу доказанной выше теоремы вытекает, что при $a > 1$ функции $S_k\left(a^{n+1}\right)$ выпуклы по a $(k = 1, 2, \ldots)$.

ЛИТЕРАТРА

1. Wehrl A. Convex and Concave Traces // Acta Phys. Austriaca. 1973, v.37, p.361-380.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978. 395 с.

Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
20.04.2000