

УДК 539.3

ВНЕДРЕНИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА С ЭЛЕКТРОДОМ В  
 ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Баблоян А.А., Бегларян А.Г., Шахвердян Г.Н.

Ա.Տ. Բաբլոյան, Ա.Գ. Բեգլարյան, Գ.Ն. Շահվերդյան

Էլեկտրոդով կոշտ դրոշմի ներթափանցումը պiezոկերամիկական կիսահարթության մեջ երբի հաշվառումով

Ստացված են պiezոկերամիկական կիսահարթության համար կոնտակտային խնդիրների ճշգրիտ լուծումները երբի արդեցության հաշվառումով, երբ դրոշմի և պiezոկերամիկայի միջև տեղի ունի լրիվ հարակցում կամ կոտրման շփում: Դրոշմի և պiezոկերամիկայի միջև դրված է էլեկտրոդ: Լաթնական քննադատման փնկտորը պiezոկերամիկական կիսահարթության եզրի հետ կազմում է կամայական անկյուն

A. H. Babloyan, A. G. Beglaryan, G. N. Shahverdyan

The intrusions of hard stamp with electrode into piezoceramic half-line, taking into consideration the influence of ether

Получены точные решения ряда контактных задач для пьезокерамической полуплоскости с учетом (или без учета) влияния эфира. Вектор предварительной поляризации с границей пьезокерамической полуплоскости составляет произвольный угол.

В работе приводятся точные решения контактных задач для пьезокерамической полуплоскости с учетом нематериальной среды (эфира), когда между жестким штампом и пьезокерамикой имеет место полное сцепление или кулоновское трение, а вектор предварительной поляризации составляет произвольный угол с границей полуплоскости. Рассматривается случай, когда электрические граничные условия также задаются в смешанном виде. Аналогичные задачи рассматривались в работах [1,2,8].

Как известно [1,2], уравнения равновесия электроупругости для плоско-деформированного состояния имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= 0 \\ (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \\ (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + e_{15} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_x$  и  $u_z$  – проекции вектора перемещений в декартовой системе координат,  $\psi$  – потенциал электрического поля. Уравнения состояния будут

$$\sigma_x = c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{31} E_z, \quad \tau_{xz} = c_{44} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - e_{15} E_x$$

$$\sigma_y = c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{31} E_z, \quad D_x = e_{15} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \varepsilon_{11} E_x$$

$$\sigma_z = c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{33} E_z, \quad \tau_{yz} = \tau_{xy} = D_y = 0, \quad (\text{rot } \bar{E} = 0)$$

$$D_z = e_{31} \frac{\partial u_x}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{33} E_z, \quad \text{div } \bar{D} = 0, \quad \bar{E} = -\text{grad } \psi \quad (2)$$

Общее решение дифференциальных уравнений (1) в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  для клиновидных областей можно представить в виде интеграла Меллина [3,4,5]

$$u_x = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_1(\alpha_p) \lambda^{-1} \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \rho_p^{-\lambda} d\lambda, \quad \Phi_p'' + \lambda^2 \Phi_p = 0$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_2(\alpha_p) \Phi_p(\lambda, \theta_p) \rho_p^{-\lambda} d\lambda, \quad \psi = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \Phi_p(\lambda, \theta_p) \rho_p^{-\lambda} d\lambda$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \frac{\gamma_3(\alpha_p)}{\alpha_p} \left[ \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \cos \theta_p + \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \sin \theta_p \right] \frac{b_p^{-\lambda+1}(\varphi)}{r^{\lambda+1}} d\lambda$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_3(\alpha_p) \left[ \frac{\Phi_p'(\lambda, \theta_p)}{\alpha_p^2} \sin \theta_p - \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \cos \theta_p \right] \frac{b_p^{-\lambda+1}(\varphi)}{r^{\lambda+1}} d\lambda$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \frac{\alpha_p^2 - 1}{\alpha_p} \gamma_3(\alpha_p) \left[ \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \sin \theta_p - \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \cos \theta_p \right] \frac{b_p^{-\lambda-1}(\varphi)}{r^{\lambda+1}} d\lambda$$

$$D_\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^3 \int_L \gamma_4(\alpha_p) \Phi_p(\lambda, \theta_p) b_p^{-\lambda}(\varphi) r^{-\lambda-1} d\lambda$$

$$D_r = \frac{1}{2\pi i} \int_L \sum_{p=1}^3 \left[ \frac{\alpha_p^2 - 1}{2\alpha_p} \Phi_p'(\lambda, \theta_p) \sin 2\varphi + \lambda \Phi_p(\lambda, \theta_p) \right] \frac{\alpha_p \gamma_4(\alpha_p)}{b_p(\varphi) \rho_p^{\lambda+1}} d\lambda \quad (3)$$

где использованы обозначения

$$x = r \cos \varphi = \rho \cos \theta, \quad \alpha z = \alpha r \sin \varphi = \rho \sin \theta$$

$$\rho_p = r b_p(\varphi), \quad \text{tg } \theta_p = \alpha_p \text{ tg } \varphi, \quad b_p^2(\varphi) = \cos^2 \varphi + \alpha_p^2 \sin^2 \varphi$$

$$\Delta_0(\alpha) \gamma_1(\alpha) = \alpha [(c_{11} + c_{44})(e_{15} - \alpha^2 e_{33}) - (e_{31} + e_{15})(c_{44} - \alpha^2 c_{33})]$$

$$\Delta_0(\alpha) \gamma_2(\alpha) = (c_{13} + c_{44})(e_{31} + e_{15}) \alpha^2 + (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(e_{15} - \alpha^2 e_{33})$$

$$\Delta_0(\alpha) = (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(c_{44} - \alpha^2 c_{33}) + (c_{13} + c_{44})^2 \alpha^2$$

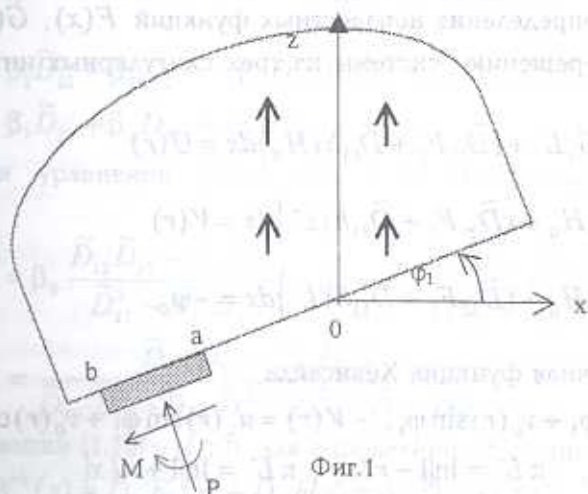
$$\gamma_3(\alpha) = c_{44} \alpha \gamma_1(\alpha) + c_{44} \gamma_2(\alpha) - e_{15} = c_{11} \alpha^{-1} \gamma_1(\alpha) - c_{13} \gamma_2(\alpha) + e_{31} = -\alpha [c_{13} \gamma_1(\alpha) - c_{33} \alpha \gamma_2(\alpha) + \alpha e_{33}], \quad \gamma_5(\alpha) = \gamma_4(\alpha) + \varepsilon_0 \quad (4)$$

$$\gamma_4(\alpha) = e_{31} \gamma_1(\alpha) - e_{33} \alpha \gamma_2(\alpha) - \alpha e_{33} = -\alpha^{-1} [e_{15} \alpha \gamma_1(\alpha) + e_{15} \gamma_2(\alpha) + \varepsilon_{11}]$$

Здесь  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная эфира,  $c_{ij}$  - упругие,  $e_{ij}$  - электрические,  $\varepsilon_{ij}$  - диэлектрические постоянные пьезокерамического

материала,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  - корни характеристического многочлена шестого порядка, для которых  $\text{Re} \alpha_p > 0$

$$\Delta(\alpha) = (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(c_{44} - \alpha^2 c_{33})(\varepsilon_{11} - \alpha^2 \varepsilon_{33}) + (c_{13} + c_{44})^2 \alpha^2 (\varepsilon_{11} - \alpha^2 \varepsilon_{33}) + 2(c_{13} + c_{44})(e_{31} + e_{15}) \alpha^2 (e_{15} - \alpha^2 e_{33}) - (e_{31} + e_{15})^2 \alpha^2 (c_{44} - \alpha^2 c_{33}) + (c_{11} - \alpha^2 c_{44})(e_{15} - \alpha^2 e_{33})^2 = 0 \quad (5)$$



Фиг.1

1. Пусть пьезокерамическая полуплоскость ограничена лучами  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ , а жесткий штамп расположен по отрезке  $L = \{0 < a \leq r \leq b < \infty, \varphi = \varphi_2\}$ . При этом граничные условия рассматриваемой задачи в случае полного сцепления будут (Фиг.1)

$$\sigma_\varphi(r, \varphi_k) = 0, \tau_{r\varphi}(r, \varphi_k) = 0, (0 \leq r < \infty, r \notin L, k = 1, 2)$$

$$u_x(r, \varphi_2) = u_{0x}(r), u_z(r, \varphi_2) = v_0(r), \psi(r, \varphi_2) = \psi_0 = \text{const}, (r \in L) \quad (1.1)$$

Кроме граничных условий (1.1) должны удовлетворяться также электрические условия контакта пьезокерамики с эфиром,

$$\psi(r, \varphi_1) = \psi_0(r, \varphi_1 + 2\pi), \psi(r, \varphi_2) = \psi_0(r, \varphi_2)$$

$$D_\varphi(r, \varphi_1) = D_{0\varphi}(r, \varphi_1 + 2\pi), D_\varphi(r, \varphi_2) = D_{0\varphi}(r, \varphi_2), (r \notin L) \quad (1.2)$$

$$\psi_0(r, \varphi_2) \equiv \psi_0, (r \in L)$$

где  $L$  - область контакта,  $\psi_0(r, \varphi)$  - потенциальная функция для эфира

$$\psi_0(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ A_0(\lambda) \sin \lambda(\pi - \varphi + \varphi_2) + B_0(\lambda) \cos \lambda(\pi - \varphi + \varphi_2) \right] r^{-\lambda} d\lambda$$

$$(0 \leq r < \infty, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi) \quad (1.3)$$

Функции  $\Phi_p$  ищем в виде

$$\Phi_p(\lambda, \theta_p) = A_p(\lambda) \sin \lambda(\theta_p - \theta_{p1}) + B_p(\lambda) \cos \lambda(\theta_p - \theta_{p1})$$

$$\text{tg} \theta_{p1} = \alpha_p \text{tg} \varphi_1, \text{tg} \theta_{p2} = \alpha_p \text{tg} \varphi_2, (p = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$



Обозначим неизвестные контактные нормальные и касательные напряжения через  $f(r)$  и  $g(r)$  соответственно и вводим обозначения

$$F(r) = f(r) \cos \varphi_1 + g(r) \sin \varphi_1, \quad G(r) = f(r) \sin \varphi_1 - g(r) \cos \varphi_1, \quad (r \in L)$$

$$D_\varphi(r, \varphi_2) = D_{0\varphi}(r, \varphi_2) = h(r), \quad (r \in L) \quad (1.5)$$

где  $h(r)$  — неизвестный нормальный компонент вектора электрического смещения (индукции) под жестким штампом.

Удовлетворяя всем граничным и контактным условиям, после ряда преобразований, определение неизвестных функций  $F(x)$ ,  $G(x)$  и  $h(x)$  ( $x \in L$ ) сводим к решению системы из трех сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_L \left\{ -\bar{D}_{11} G_2 L^- + (\bar{D}_{12} F_2 + \bar{D}_{13} h) H_0 \right\} dx = U(r)$$

$$\int_L \left\{ \bar{D}_{21} G_2 H_0 + (\bar{D}_{22} F_2 + \bar{D}_{23} h) L^- \right\} dx = V(r)$$

$$\int_L \left\{ \bar{D}_{31} G_2 H_0 + (\bar{D}_{32} F_2 + \bar{D}_{33} h) L^- \right\} dx = -\psi_0 \quad (1.6)$$

где  $H_0(x)$  — единичная функция Хевисайда

$$U(r) = -u_0(r) \cos \varphi_1 + v_0(r) \sin \varphi_1, \quad -V(r) = u_0(r) \sin \varphi_1 + v_0(r) \cos \varphi_1,$$

$$H_0 = H_0(r/x - 1), \quad \pi L^- = \ln|1 - r/x|, \quad \pi L^+ = \ln|1 + r/x| \quad (1.7)$$

а  $(0.5\pi - \varphi_1)$  — угол между вектором предварительной поляризации и границей полуплоскости (вектор поляризации направлен внутрь тела).

Постоянные величины  $\bar{D}_{ij}$  и  $D_{ij}$  определяются по формулам

$$D_{11} = [\Gamma_1(\alpha_p), \alpha_p^{-1}, \Gamma_5(\alpha_p)], \quad D_{12} = [1, \Gamma_1(\alpha_p), \Gamma_5(\alpha_p)]$$

$$D_{13} = [1, \alpha_p^{-1}, \Gamma_1(\alpha_p)], \quad D_{23} = [\Gamma_2(\alpha_p), \alpha_p^{-1}, \Gamma_5(\alpha_p)]$$

$$D_{22} = [1, \Gamma_2(\alpha_p), \Gamma_5(\alpha_p)], \quad D_{23} = [1, \alpha_p^{-1}, \Gamma_2(\alpha_p)]$$

$$D_{31} = [\gamma_3^{-1}(\alpha_p), \alpha_p^{-1}, \Gamma_5(\alpha_p)], \quad D_{32} = [1, \gamma_3^{-1}(\alpha_p), \Gamma_5(\alpha_p)]$$

$$D_{33} = [1, \alpha_p^{-1}, \gamma_3^{-1}(\alpha_p)], \quad D_0 = [1, \alpha_p^{-1}, \Gamma_5(\alpha_p)] \quad (1.8)$$

где использованы обозначения

$$\Gamma_k(\alpha_p) = \frac{\gamma_k(\alpha_p)}{\gamma_1(\alpha_p)}, \quad D_0 \cdot \bar{D}_{ij} = D_{ij}, \quad [a_p, b_p, c_p] = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

Пользуясь теоремой Виета, для уравнения шестого порядка (5) доказывается, что матрица  $\{D_{ij}\}$  симметрична, то есть  $D_{ij} = D_{ji}$  для любого пьезокерамического материала.

Для решения интегральных уравнений умножим второе и третье уравнения системы (1.6) на  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно и прибавим к первому уравнению

$$\int_L \left\{ H_0 \left[ \tilde{D}_{12} F_2 + \tilde{D}_{13} h + (\beta_1 \tilde{D}_{12} + \beta_2 \tilde{D}_{13}) G_2 \right] + L \left[ (\beta_1 \tilde{D}_{22} + \beta_2 \tilde{D}_{23}) F_2 + (\beta_1 \tilde{D}_{23} + \beta_2 \tilde{D}_{33}) h - \tilde{D}_{11} G_2 \right] \right\} dx = U + \beta_1 V - \beta_2 \Psi_0 \quad (1.10)$$

Далее, требуем выполнение следующих соотношений:

$$\frac{\beta_1 \tilde{D}_{22} + \beta_2 \tilde{D}_{23}}{\tilde{D}_{12}} = \frac{\beta_1 \tilde{D}_{23} + \beta_2 \tilde{D}_{33}}{\tilde{D}_{13}} = \frac{-\tilde{D}_{11}}{\beta_1 \tilde{D}_{12} + \beta_2 \tilde{D}_{13}} = -\beta_0 \quad (1.11)$$

или же

$$\begin{aligned} \beta_1 \tilde{D}_{22} + \beta_2 \tilde{D}_{23} &= -\beta_0 \tilde{D}_{12}, \quad \beta_1 \tilde{D}_{12} + \beta_2 \tilde{D}_{13} = \beta_0^{-1} \tilde{D}_{11} \\ \beta_1 \tilde{D}_{23} + \beta_2 \tilde{D}_{33} &= -\beta_0 \tilde{D}_{13} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Разрешая уравнения (1.11) или (1.12) относительно  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_0$ , получим

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_0 \frac{\tilde{D}_{12} \tilde{D}_{33} - \tilde{D}_{13} \tilde{D}_{23}}{\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}}, \quad \beta_2 = \beta_0 \frac{\tilde{D}_{22} \tilde{D}_{13} - \tilde{D}_{12} \tilde{D}_{23}}{\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}} \\ \beta_0^2 &= \frac{\tilde{D}_{11} (\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33})}{\tilde{D}_{33} \cdot \tilde{D}_{12}^2 + \tilde{D}_{22} \cdot \tilde{D}_{13}^2 - 2 \tilde{D}_{12} \cdot \tilde{D}_{13} \cdot \tilde{D}_{23}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

На основании (1.10)–(1.13) для определения функций

$$X^\pm(x) = \tilde{D}_{12} F_2(x) + \tilde{D}_{13} h(x) \pm \beta_0^{-1} \tilde{D}_{11} \cdot G_2(x) \quad (1.14)$$

получим следующее известное сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_L \left[ H_0 \mp \frac{\beta_0}{\pi} L^- \right] X^\pm(x) dx = g^\pm(r), \quad (x \in L) \quad (1.15)$$

$$\text{где } g^\pm(r) = U(r) \pm [\beta_1 V(r) - \beta_2 \Psi_0], \quad \Psi_0 = \text{const} \quad (1.16)$$

Для получения недостающего уравнения, из последних двух уравнений (1.6) исключим функцию  $G_2(x)$ . Тогда для определения неизвестной функции

$$X(x) = \beta_2 F_2(x) - \beta_1 h(x) \cdot (\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) \cdot g(r) = \beta_0 [\tilde{D}_{31} V(r) + \tilde{D}_{21} \Psi_0] \quad (1.17)$$

получим простое интегральное уравнение

$$\int_L X(x) L^- dx = g(r), \quad (r \in L) \quad (1.18)$$

Уравнения (1.15) и (1.18) решаются точно, в замкнутом виде [6,7]. После решения интегральных уравнений (1.15) и (1.18) контактные нормальные и касательные напряжения  $(f_2(x), g_2(x))$ , а также нормальная проекция вектора индукции  $(D_\varphi(x) = h(x))$  будут определяться элементарно из соотношений (1.5), (1.14) и (1.17).

В том случае, когда  $L$  - отрезок прямой  $(a, b)$ , решение сингулярных интегральных уравнений (1.15) и (1.18) представим в виде ряда Фурье по полиномам Якоби и Чебышева соответственно [3,7]. Для уравнения (1.15) имеем

$$X^\pm(x) = \omega_{\mp\gamma}^{-1}(x) \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{\pm} Q_m^{\pm\gamma}(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.19)$$

где  $(c)_m$  - символ Похгаммера,

$$X_m^{\pm} = \frac{m(m!) \sin 2\pi\gamma}{\pi(0.5+\gamma)_m(0.5-\gamma)_m} \int_a^b \frac{g_{\pm}(r)}{\omega_{\mp}(r)} Q_m^{\mp\gamma}(r) dr, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\beta_0 + 1}{\beta_0 - 1}$$

$$Q_m^{\gamma}(x) = P_m^{(\gamma-1/2, -\gamma-1/2)} \left( \frac{2x-b-a}{b-a} \right), \quad \omega_{\gamma}(x) = (b-x)^{-\gamma+1/2} (x-a)^{\gamma+1/2} \quad (1.20)$$

Точное решение уравнения (1.18) приведено в [6].

Первые два коэффициента разложения (1.19) можно определять также из соотношений

$$\int_a^b X(x) dx = \frac{\pi X_0}{\cos \pi\gamma}, \quad \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) X(x) dx = \frac{\pi(b-a)}{2 \cos \pi\gamma} \left[ (1/4 - \gamma^2) X_1 - 2\gamma X_0 \right] \quad (1.21)$$

Путем разделения действительных и мнимых частей отсюда получаются условия равновесия жесткого штампа.

Аналогичным образом могут быть получены замкнутые решения других контактных задач электроупругости с учетом (или без учета) нематериальной среды (эфира). Отметим следующий факт: в контактных задачах теории упругости со сцеплением, напряжения вблизи концов жесткого штампа имеют осцилляционный характер. В том случае, когда все три граничные условия (механические и электрические) задаются в смешанном виде, при любом направлении вектора предварительной поляризации контактные напряжения на концах штампа обращаются в бесконечность монотонно (без осцилляций), независимо от того, учитывается ли влияние эфира или нет.

Приведем значения постоянных  $D_{ij}$  и  $\beta_k$  для некоторых пьезокерамических материалов ( $D_{ij} = D_{ji}$ ), при учете влияния эфира ( $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м):

#### 1. Пьезокерамика-PZT-4:

$$D_0 = 1.37375i, \quad \tilde{D}_{11} = 0.183924, \quad \tilde{D}_{12} = -0.0752849, \quad \tilde{D}_{13} = -0.0173454,$$

$$\tilde{D}_{22} = 0.177179, \quad \tilde{D}_{23} = -0.0221169, \quad \tilde{D}_{33} = -0.0884141, \quad \beta_0 = 2.49048,$$

$$\beta_1 = 0.341647, \quad \beta_2 = -5.74054, \quad \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.121538;$$

#### 2. Пьезокерамика-PZT-65/35:

$$D_0 = -1.99038i, \quad \tilde{D}_{11} = 0.139673, \quad \tilde{D}_{12} = -0.0604444, \quad \tilde{D}_{13} = -0.0197556,$$

$$\tilde{D}_{22} = 0.159684, \quad \tilde{D}_{23} = -0.0214183, \quad \tilde{D}_{33} = -0.0174305, \quad \beta_0 = 3.01575,$$

$$\beta_1 = 0.586428, \quad \beta_2 = -4.13862, \quad \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.101917;$$

#### 3. Пьезокерамика - ЦТС-19:

$$D_0 = 217.927i, \quad \tilde{D}_{11} = 0.230068, \quad \tilde{D}_{12} = -0.0780912, \quad \tilde{D}_{13} = -0.0130722,$$

$$\tilde{D}_{22} = 0.209539, \quad \tilde{D}_{23} = -0.0205082, \quad \tilde{D}_{33} = -0.00862917, \quad \beta_0 = 4.52393,$$

$$\beta_1 = 0.823652, \quad \beta_2 = -8.81074, \quad \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.0692478;$$

Для сравнения приведем значения постоянных  $D_{ij}$  и  $\beta_k$  для тех же пьезокерамических материалов ( $D_{ij} = D_{ji}$ ) без учета влияния эфира



( $\epsilon_0 = 0$ ):

1. Пьезокерамика-PZT-4:

$$D_0 = 1.37483i, \tilde{D}_{11} = 0.183951, \tilde{D}_{12} = -0.0752509, \tilde{D}_{13} = -0.0173318, \\ \tilde{D}_{22} = 0.177223, \tilde{D}_{23} = -0.0220996, \tilde{D}_{33} = -0.0083345, \beta_0 = 2.49178, \\ \beta_1 = 0.341825, \beta_2 = -5.74353, \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.121481;$$

2. Пьезокерамика-PZT-65/35:

$$D_0 = -1.99345i, \tilde{D}_{11} = 0.139707, \tilde{D}_{12} = -0.060407, \tilde{D}_{13} = -0.0197251, \\ \tilde{D}_{22} = 0.159725, \tilde{D}_{23} = -0.0213853, \tilde{D}_{33} = -0.0174036, \beta_0 = 3.01951, \\ \beta_1 = 0.58716, \beta_2 = -4.14378, \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.0101799;$$

3. Пьезокерамика-ЦТС-19:

$$D_0 = 218.093i, \tilde{D}_{11} = 0.230084, \tilde{D}_{12} = -0.0780675, \tilde{D}_{13} = -0.0130622, \\ \tilde{D}_{22} = 0.209576, \tilde{D}_{23} = -0.0204925, \tilde{D}_{33} = -0.00862259, \beta_0 = 4.52713, \\ \beta_1 = 0.824233, \beta_2 = -8.81696, \delta_0 = \pi^{-1} \arctg \beta_0^{-1} = 0.0692005;$$

2. Аналогичным образом задача внедрения жесткого штампа с электродом в пьезокерамическую плоскость при наличии кулоновского трения ( $\tau_{r\varphi} = \chi \sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\varphi = f(r)$ ,  $r \in D$ ) и учета влияния эфира сводится к решению следующей системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_L \left\{ [A f(x) + \tilde{D}_{13} \sin \varphi_1 h(x)] H_0 - [B f(x) + \tilde{D}_{23} \cos \varphi_1 h(x)] L^- \right\} dx = u(r) \quad (2.1)$$

$$\int_L \left\{ \tilde{D}_{31} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1) f(x) H_0 + [\tilde{D}_{32} (\cos \varphi_1 + \chi \sin \varphi_1) f(x) + \tilde{D}_{33} h(x)] L^- \right\} dx = -\psi_0$$

где

$$A = \chi \tilde{D}_{12}, \quad B = \tilde{D}_{11} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 + \tilde{D}_{22} (\cos \varphi_1 + \chi \sin \varphi_1) \cos \varphi_1 \quad (2.2)$$

Путем введения новой неизвестной функции

$$X(x) = f(x) [A + \beta \tilde{D}_{31} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1)] + h(x) \tilde{D}_{12} \sin \varphi_1 \quad (2.3)$$

задачу сведем к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\int_L [H_0 - \beta_0 L^-] X(x) = u(r) - \beta \psi_0 \quad (r \in L) \quad (2.4)$$

где числа  $\beta$  и  $\beta_0$  при  $\sin \varphi_1 \neq 0$  определяются из соотношений

$$\frac{\beta \tilde{D}_{32} (\cos \varphi_1 + \chi \sin \varphi_1) - B}{\beta \tilde{D}_{31} (\sin \varphi_1 - \chi \cos \varphi_1) + A} = \frac{\beta \tilde{D}_{33} - \tilde{D}_{23} \cos \varphi_1}{\tilde{D}_{13} \sin \varphi_1} = -\beta_0 \quad (2.5)$$

После решения уравнения (2.4) для двух пар значений  $\beta$  и  $\beta_0$ , полученных из (2.5), с помощью формулы (2.3) можно определять неизвестные функции  $f(x)$  и  $h(x)$ .

Как видно из (2.3)–(2.5), при контакте с трением степени особенностей напряжений зависят от коэффициента трения ( $\chi$ ) и направления вектора предварительной поляризации (анизотропии). Если же  $\sin \varphi_1 = 0$ , то вместо (2.4) будем иметь

$$\int_L \left\{ \chi (\tilde{D}_{21} \tilde{D}_{33} - \tilde{D}_{31} \tilde{D}_{23}) H_0 + (\tilde{D}_{32} \tilde{D}_{23} - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) L \right\} f_2(x) dx = \tilde{D}_{33} u(r) - \tilde{D}_{23} \Psi$$

$$\int_L \left\{ (\tilde{D}_{32} \tilde{D}_{21} - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{31}) f_2(x) + (\tilde{D}_{33} \tilde{D}_{21} - \tilde{D}_{23} \tilde{D}_{31}) h(x) \right\} L dx = \tilde{D}_{31} u(r) - \tilde{D}_{21} \Psi \quad (2.6)$$

В частном случае, для гладкого штампа ( $\chi = 0$ ) из (2.5) получим

$$\tilde{D}_{33} \beta = \tilde{D}_{23} \cos \varphi_1 \pm \sqrt{(\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) \cos^2 \varphi_1 - \tilde{D}_{11} \tilde{D}_{33} \sin^2 \varphi_1}$$

$$\beta_0 = \mp (\tilde{D}_{13} \sin \varphi_1)^{-1} \sqrt{(\tilde{D}_{23}^2 - \tilde{D}_{22} \tilde{D}_{33}) \cos^2 \varphi_1 - \tilde{D}_{11} \tilde{D}_{33} \sin^2 \varphi_1} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.4) или (2.6) также решаются в замкнутом виде [6,7].

Отметим, что точные решения рассмотренных здесь задач, а также все выкладки, можно было получить более простым способом, если бы воспользовались результатами работы [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 23 с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. - М.: Наука, 1988. 471 с.
3. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. - М.: Наука, 1984. 255 с.
4. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Плоская задача электроупругости пьезокерамического клина. Докл. НАН РА, 1999, т. 99, с. 172-177.
5. Баблоян А.А., Мелкумян С.А., Шахвердян Г.Н. Некоторые задачи квазипотенциала. // ЕГУ, Институт механики НАН РА. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван, 1997, с.201-204.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 708 с.
7. Попов Г.Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. - ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
8. Баблоян А.А., Аванян В.Т., Варданян Л.М. Общее решение уравнений равновесия электроупругости для наклонной полосы // Сб. науч. тр., конференция, посв. 90-летию со дня рожд. Т.Т. Хачатряна и О.М. Сапонджяна, Ереван, 1997, с.46-50.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию  
29.06.2000