

УДК 539.3: 62.50

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
УПРУГИХ СВОЙСТВ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРУГОГО
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА И УПРУГОГО
МАНИПУЛЯТОРА
Айрапетян В.В.

Վ.Վ. Հայրապետյան

Թռչող առածական տարրի մի ճողիչի և առածական մանիպուլյատորի առածական հատկությունների
հետազոտման մի քանի թվային արդյունքներ

Երկու առածական մեխանիկական համակարգերի (թռչող տարր, առածական մանիպուլյատոր) ճարեմատիկական ճողիչների հիման վրա, տարրեր կոնստրուկցիոն նյութերի համար կատարվում է տատանողական սրբոցեսների թվային անալիզ: Առածական տատանումների և լրացուցիչ դեկավարող ճիգերի հետազոտման արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների տեսքով: Հետազոտությունների ընթացքում օգտագործված է Mathematica 3.0 ծրագրային փաթեթը:

V.V. Hayrapetyan

Some numerical results of investigations of elastic properties of one model of the elastic aircraft and elastic manipulator

На основе математических моделей двух упругих механических систем (летательный аппарат, упругий манипулятор) проводится численный анализ колебательных процессов при различных конструкционных материалах (сталь, стеклопластик, дюралюминий). Результаты исследований упругих колебаний и дополнительных управляющих усилий представлены в виде графиков. При исследованиях использован программный пакет Mathematica 3.0.

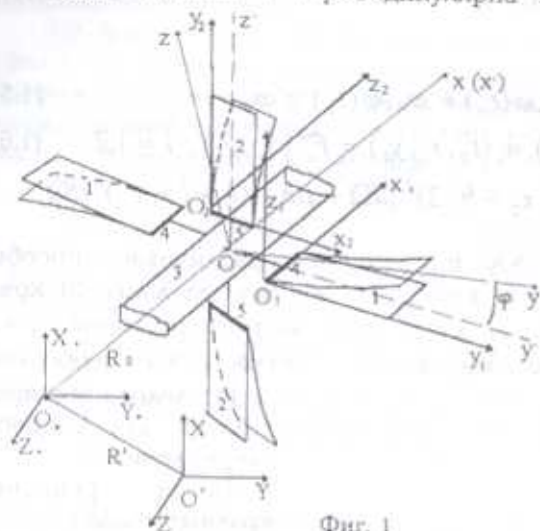
Повышение эффективности работы механических систем во многих случаях приводит к необходимости облегчения конструкции с использованием различных конструкционных материалов. Это приводит к увеличению упругих свойств механических систем. С возрастанием упругих свойств таких систем возникают дополнительные вопросы, связанные с разработкой систем управления. Для повышения эффективности алгоритмов управления необходимо провести качественные и количественные исследования [1], с целью выяснения степени воздействия упругости элементов конструкции на динамику движения. Результаты и схемы таких исследований могут быть использованы при конструировании механических систем на стадии проектирования и для разработки систем управления, учитывающих упругость элементов конструкции. В данной работе приводятся некоторые результаты таких исследований для одной модели летательного аппарата (ЛА) и манипулятора с упругим последним звеном.

1. Кинематическая модель ЛА и уравнения движения.

Рассматривается управляемое движение упругого летательного аппарата (ЛА) в центральном гравитационном поле Земли. ЛА представляет собой цилиндрическое, абсолютно твердое тело с закрепленными к нему

упругими пластинами.

Пара пластин 1 перпендикулярна паре пластин 2. Края пластин



Фиг. 1

жестко заделаны к абсолютно жестким стержням 4,5. Пластины однородные с толщиной h и размерами $(a \times b) = \Omega$. Они характеризуются плотностью ρ , модулем Юнга E и жесткостью на изгиб D . Радиус центрального тела обозначим через q . Введем инерциальную систему координат $O-X-Y-Z$ (фиг.1) и связанную прямоугольную систему координат $Ox_1y_1z_1$, начало которой находится в центре масс ЛА, а ось Ox_1 направлена вдоль продольной оси ЛА[2].

Будем рассматривать поступательное движение ЛА вдоль оси Ox_1 и вращение вокруг той же оси. Положение начала системы координат $O-X-Y-Z$ относительно $O_1X_1Y_1Z_1$ определим радиус-вектором R_1 , а положение центра масс ЛА относительно системы $O-X-Y-Z$ — R_0 . Относительное положение точки тела в деформированном состоянии обозначим через вектор r . Абсолютное положение точек ЛА определяется вектором

$$R = R_1 + R_0 + r; \quad (r = r_0 + w(t, x, y)) \quad (1.1)$$

где вектор R_0 определяет положение центра масс ЛА в системе координат $O-X-Y-Z$, r — относительное положение точек ЛА, $(w(t, x, y))$ — вектор упругих смещений пластин, $R_1 = \text{const}$.

Поступательное движение и вращение ЛА происходят за счет силы F , направленной вдоль оси Ox_1 и вращательного момента M , приложенной вокруг той же оси. Для аналитических исследований уравнений движения и упругих колебаний пластин предполагается, что ось $O-X_1$ совпадает с продольной осью ЛА. Уравнения движения ЛА и упругих колебаний пластин в рамках линейной теории упругости, с учетом следующих предположений $D \sim \epsilon^3$, $w_i/h \sim \epsilon$ $i=1,2$, $\dot{\varphi} \sim \epsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \epsilon$, $\dot{R}_0 \sim \epsilon^{1/2}$, $\ddot{R}_0 \sim \epsilon$, $\epsilon \ll 1$ [3, 4] имеют вид:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F - 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega \quad (1.1)$$

$$2a_{\varphi} \ddot{\varphi} \rho h + 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega + I\ddot{\varphi} = M(t) \quad (1.2)$$

$$\ddot{w}_1 + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_1 = -\ddot{\varphi} (q + l + y_1) \quad (1.3)$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$R_0(t_0) = R_0, \dot{R}_0(t_0) = V_0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 \quad (1.5)$$

$$w_i(t_0, x_i, y_i) = F_i^1(x_i, y_i), \dot{w}_i(t_0, x_i, y_i) = F_i^2(x_i, y_i) \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

где $a_{\varphi 1} = d_2 \rho h \iint_{\Omega} [(q+l+y_1)^2 + (x_2 - b/2)^2] d\Omega + \rho h \iint_{\Omega} (q+l+y_2)^2 d\Omega$

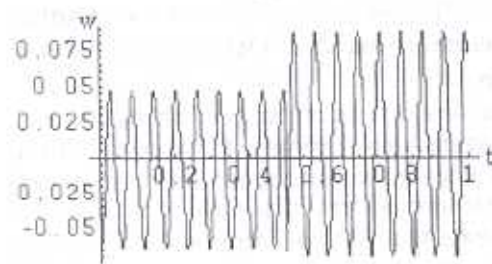
В подобных конструкциях ЛА применяются различные способы закрепления пластин: 1) края $x=0, x=b, y=a$ жестко заделаны; 2) края $x=0, x=b, y=a$ свободны; 3) края $x=0, x=b$ жестко заделаны, $y=a$ свободен; 4) край $x=0$ жестко заделан, а $x=b, y=a$ свободны.

Исследования проводятся для способа закрепления 3.

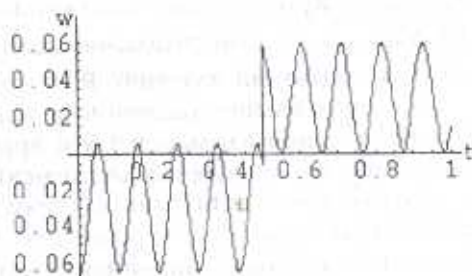
После решения краевых задач (1.3)-(1.6) для способа закрепления 3 проведены численные

исследования основной моды упругих колебаний пластин из дюралюминия и стеклопластика, а также дополнительных управляющих усилий ЛА. Упругие колебания пластин рассматриваются относительно статического равновесия.

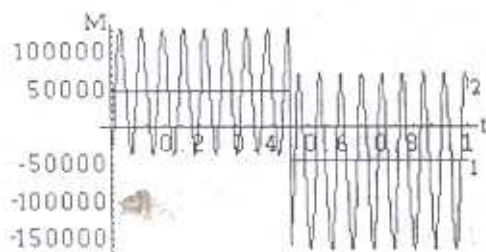
Параметры для дюралюминия следующие: $E = 7.2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2.8 \cdot 10^3 \text{ Кг/м}^3$, для стеклопластика - $E = 1.4 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $\rho = 1.6 \cdot 10^3 \text{ [5]}$. Режим движения представлен на фиг.2.



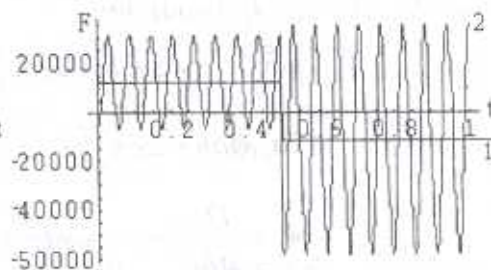
фиг.4



фиг.5



фиг.6

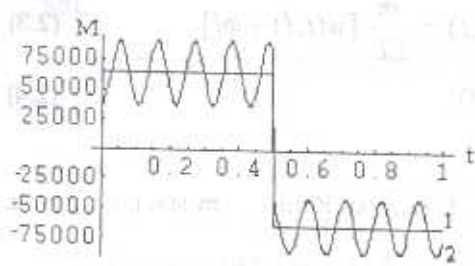


фиг.7

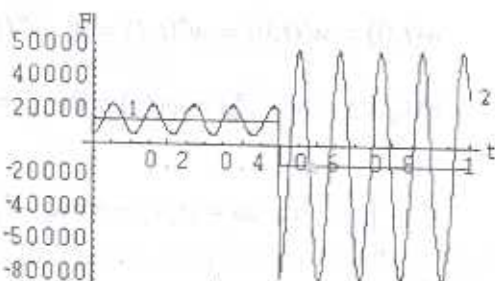
Вычисления проведены при следующих параметрах:

$\ddot{\varphi}_p = -\ddot{\varphi}_T = 9.8 \text{ л/с}^2$, $a=4\text{м}$, $b=2\text{м}$, $q=1\text{м}$, $h=0.5\text{см}$ с нулевыми начальными условиями.

На фиг.4.5 представлены графики главных мод колебаний пластин 1 (фиг.1) из стеклопластика и дюралюминия, соответственно. Масса пластин из стеклопластика $m_{\text{стекл}} = 256\text{кг}$, частота главной моды $k_{\text{стекл}} = 107\text{Гц}$. Для дюралюминия получены следующие результаты: масса $m_{\text{дюр}} = 448\text{кг}$, частота главной моды $k_{\text{дюр}} = 58\text{Гц}$.

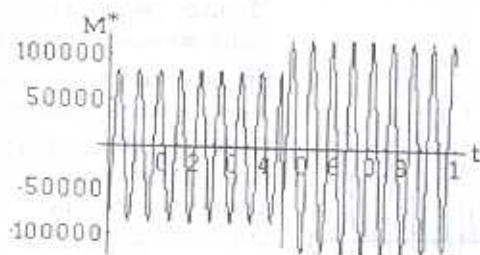


фиг.8

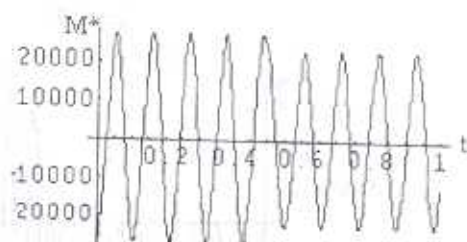


фиг.9

На основании формул (1.1), (1.2), на фиг. 6, 7 и 8, 9 представлены графики управляющих моментов и сил ЛА с пластинами из стеклопластика и дюралюминия. Графики 1 на этих фигурах соответствуют управляющим силам и моментам жесткой модели ЛА, а графики 2 - упругой(полной) модели ЛА. Управляющие силы и моменты имеют колебательный характер, параметры которых существенно зависят от выбора материалов. На фиг. 10, 11 представлены графики управляющих моментов ЛА, обусловленных упругостью пластин из стеклопластика и дюралюминия, соответственно.



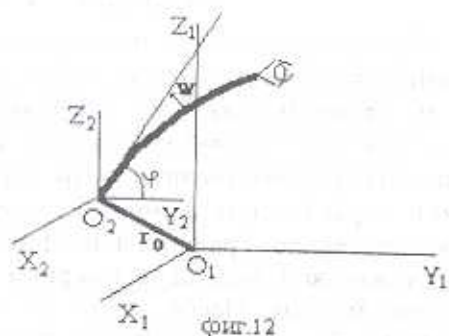
фиг.10



фиг.11

Проведены также аналогичные исследования для режима движения, представленного на фиг. 3 и для способа закрепления пластин 2.

2. Расчетная модель упругого манипулятора. Рассматривается



фиг.12

кинематическая модель манипулятора (фиг. 12), последнее звено которого моделируется как упругий стержень [6,7]. На конце упругого звена находится схват с грузом. Уравнения движения последнего звена и упругих колебаний относительно системы координат $O_2 X_2 Y_2 Z_2$, имеют вид [6,7]

$$A\ddot{\varphi} + \int_0^l \rho s \xi \ddot{w}(t, \xi) d\xi = Q(t) \quad (2.1)$$

$$\ddot{w}(t, \xi) + \frac{EI_0}{\rho_0 s_0} w''(t, \xi) = -\ddot{\varphi} \xi \quad (2.2)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

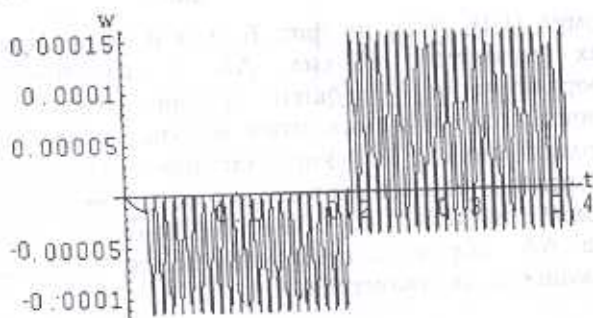
$$w(t, 0) = w'(t, 0) = w''(t, l) = 0; \quad w'''(t, l) = \frac{m}{EI_0} [\ddot{w}(t, l) + \ddot{\varphi} l] \quad (2.3)$$

$$w(t_0, \xi) = \dot{w}(t_0, \xi) = \varphi(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) = 0 \quad (2.4)$$

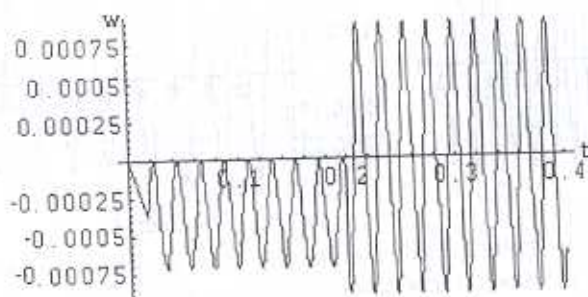
где

$$A = \int_0^l \rho s \xi^2 d\xi, \quad \rho s = \rho_0 s_0 + m \delta(\xi - l), \quad E - \text{модуль Юнга, } m - \text{масса груза,}$$

$t_0 = \text{const.}$



фиг.13



фиг.14

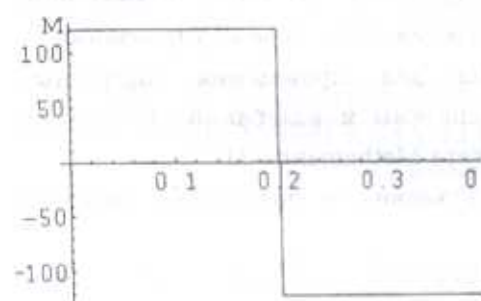
При выводе уравнений движения и упругих колебаний действие силы тяжести было пренебрежено.

После решения краевой задачи (2.2)-(2.4) методом разделения переменных Фурье, и учитывая выражение (2.1), проведены численные исследования главной моды упругих колебаний последнего звена и управляющего момента $Q(t)$ для режима движения, представленного на фиг.2. Вычисления проводились для следующих пара-

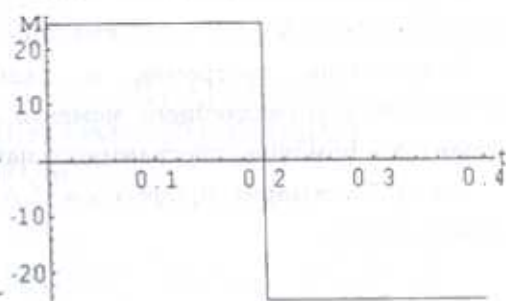
метров движения: $\ddot{\varphi}_p = -\ddot{\varphi}_T = 9.8 \text{ l/c}^2$, последнее звено манипулятора - полный цилиндр длиной 3м с радиусами $r_1 = 0.013\text{м}$, $r_2 = 0.015\text{м}$; масса груза $m = 5\text{кг}$, и для звена из стали и стеклопластика со следующими параметрами: $E_{\text{сталь}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, $E_{\text{стекл}} = 1.4 \cdot 10^{11}$, $\rho_{\text{сталь}} = 7.85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{стекл}} = 1.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. На фиг.13,14 представлены графики главной моды упругих колебаний, а на фиг.15,16 - графики управляющих моментов упругого звена из стали и стеклопластика, соответственно. Графики 1 на фиг.15,16 соответствуют управляющему моменту жесткой модели, а графики 2 - управляющему моменту упругой (полной) модели. Масса звена из стали $m_{\text{сталь}} = 4.14\text{кг}$, частота главной моды $k_{\text{сталь}} = 727\text{гц}$, а для звена из

стеклопластика получены следующие результаты: масса $m_{\text{стекл}} = 0.707 \text{ кг}$, частота главной моды $k_{\text{стекл}} = 352 \text{ гц}$.

Проведены также аналогичные исследования для режима движения, представленного на фиг. 3.



фиг.15



фиг.16

3. Кибернетическая схема систем управления упругими системами.

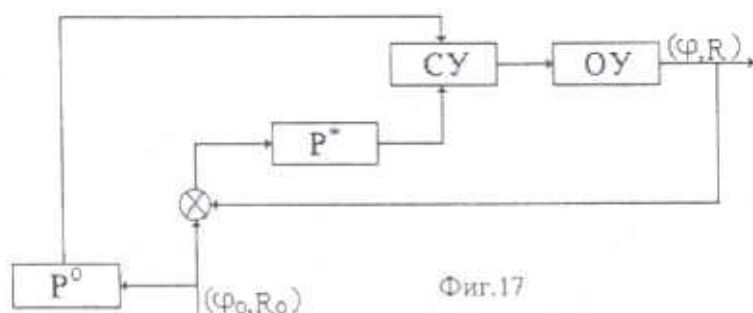
Проведенные численные исследования показали, что для вышеисследуемых систем при повышении их упругих свойств, в зависимости от характеристик конструкционных материалов, поведение системы может претерпевать значительные отклонения по сравнению с жесткими системами. Для учета этих отклонений необходимо включать в систему управления дополнительный регулятор. Динамика такого регулятора для ЛА определяется из выражений

$$F^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega \quad (3.1)$$

$$M^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega \quad (3.2)$$

а для манипулятора – выражением

$$\int_0^l \rho s \xi \ddot{w}(t, \xi) d\xi = Q^*(t) \quad (3.3)$$



Фиг.17

Как видно из (3.1)-(3.3), их динамика, в основном, зависит от упругих свойств системы и имеет колебательный характер. Частота регулятора

равна частоте колебаний упругих элементов. На фиг.17 представлена кибернетическая схема системы управления, в которую включен дополнительный регулятор P^* , учитывающий упругость системы.

P^0 – регулятор жесткой модели ЛА; P^* – регулятор, учитывающий упругий эффект ЛА; СУ – система управления; ОУ – объект управления.

Разработана программа и схема для проведения численных исследований управляющего момента системы и колебаний ее упругих элементов с помощью программного пакета Mathematica 3.0.

Автор благодарит профессора А.А.Гукасяна за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. - М.: Наука, 1989. 363с.
2. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами. //Изв. НАН РА, Механика, 2000, т.53, N1, с.61-68.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. 559с.
4. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. //Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, N°4, с.13-23.
5. Таблица физических величин. Под ред. акад. И.К. Кикоина – М.: Атомиздат, 1976. 1006с.
6. Акулейко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. //Изв. АН СССР, МТТ, 1983, N5, с. 33-41.
7. Гукасян А.А. Анализ движений двухзвенного упругого манипулятора с электромеханическими приводными системами на подвижном основании. //Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1989, т.42, N1, с.45-55.

Ереванский госуниверситет,
кафедра Теоретической механики

Поступила в редакцию
11.05.2000