

УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА
 КРАЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО КОНЕЧНОГО УПРУГОГО
 СЛОЯ

Саркисян А. В.

Լ Վ Սարգսյան

Սահբային մակերևութային ալիքների դիֆրակցիան էլեկտրահաղորդիչ վերջավոր առավելակալի շերտի եզրում

Աշխատանքում ուսումնասիրված է պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության խնդիրը, որի եզրային մակերևույթին ամրակցված է փոքր հաստություն ունեցող վերջավոր երկարությամբ առավելակալի էլեկտրահաղորդիչ շերտ: Ենթադրվում է, որ պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածության ազատ մակերևույթը մետաղացված է եւ անվերջությունից տարածվում է էլեկտրատարակալի մակերևութային ալիք: Ստացված են անդրադարձվող մակերևութային ալիքի, անցնող մակերևութային ալիքի անալիտոտղաները:

L.V. Sarkisian

Diffraction of shearing surface waves in the edge of electrical conductive elastic final layer

В работе рассматривается задача пьезоэлектрического полупространства (пьезоэлектрик класса *6mm* гексагональной симметрии), на граничной поверхности которого прикреплен упругий конечный электропроводящий слой малой толщины. Предполагается, что свободная часть поверхности пьезоэлектрического полупространства металлизирована и из бесконечности распространяется поверхностная электроупругая волна. Получены амплитуды отраженной и проходящей поверхностной волны.

Рассмотрим пьезоэлектрическое полупространство (пьезоэлектрик класса *6mm* гексагональной структуры), на граничной поверхности которого прикреплен упругий конечный электропроводящий слой малой толщины h . Пьезоэлектрическое полупространство отнесем к прямоугольной системе координат $Oxyz$, так чтобы ось Oz совпадала с осью симметрии пьезоэлектрика, ось Ox была направлена вдоль границы раздела полупространства и конечного проводящего слоя, а полуплоскость $y = 0$, при $-a < x < a$ была контактной поверхностью полупространства со слоем. Полагается, что свободная часть поверхности пьезоэлектрического полупространства ($y = 0, |x| > a$) металлизирована. Из бесконечности ($x < 0$) вдоль оси Ox распространяется поверхностная электроупругая волна [1].

$$u(x, y, t) = A_0 e^{-\sqrt{\sigma_4^2 - k^2} y} e^{i(\sigma_4 x - \omega t)}$$

$$\Phi(x, y, t) = A_0 \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \left(e^{-\sqrt{\sigma_4^2 - k^2} y} - e^{-\sigma_4 y} \right) e^{i(\sigma_4 x - \omega t)} \quad (1)$$

где $\sigma_n = k_2 / \sqrt{1 - \delta^2}$, $\delta = A/B$, $A = e_{15}^2 / \epsilon_{11}$, $B = c_{44} + e_{15}^2 / \epsilon_{11}$, ϵ_{11} — диэлектрическая постоянная пьезоэлектрика, e_{15} — пьезоэлектрическая постоянная, c_{44} — упругая постоянная, ρ — плотность материала полупространства, $\chi^2 = e_{15}^2 / (\epsilon_{11} c_{44})$ — коэффициент электромеханической связи, t — параметр, характеризующий время, ω — частота колебаний, A_0 — постоянная.

Сдвиговая поверхностная волна, очевидно, дифрагирует на краю $x = -a$ упругого электропроводящего слоя. Требуется определить амплитуды отраженной и проходящей поверхностной волны. Поле упругих перемещений пьезоэлектрического полупространства представим в виде $u = (0, 0, u_3(x, y)e^{-i\omega t})$, перемещение упругого электропроводящего слоя в виде $u_1 = (0, 0, u_3^{(1)}(x, y)e^{-i\omega t})$, а электрический потенциал пьезоэлектрического полупространства в виде $\tilde{\Phi}(x, y)e^{-i\omega t}$.

Поставленная задача формулируется в виде следующих граничных задач [1, 2]:

для пьезоэлектрического полупространства

$$\Delta u_3 + k_2^2 u_3 = 0, \quad \Delta \tilde{\Phi} = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \Delta u_3, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty \quad (2)$$

при граничных условиях

$$\tilde{\Phi}|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{при } |x| > a \quad (3)$$

для электропроводящего слоя

$$\frac{d^2 u_3^{(1)}(x)}{dx^2} + k_1^2 u_3^{(1)} = -\frac{1}{hG_1} \tau(x), \quad |x| < a \quad (4)$$

при граничных условиях

$$\frac{du_3^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=-a} = 0, \quad \frac{du_3^{(1)}(x)}{dx} \Big|_{x=a} = 0 \quad (5)$$

При этом должны выполняться еще условия контакта

$$u_3(x, 0) = u_3^{(1)}(x),$$

$$c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau(x), \quad |x| < a.$$

Причем $k_1^2 = \omega^2 / c_1^2$, $c_1^2 = G_1 / \rho_1$, где G_1 , ρ_1 — соответственно модуль сдвига и плотность материала упругого проводящего слоя, $\tau(x)$ — контактные касательные напряжения, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. При составлении уравнения (4) учитывалось малость толщины слоя h в том смысле, что $h/\lambda \ll 1$, где λ — длина волны по направлению y .

Далее, имея в виду (1), введем функции

$$w(x, y) = u_3(x, y) - A_0 e^{-\sqrt{\sigma_2^2 - k_2^2} y} e^{i\sigma_2 x}$$

$$\Phi(x, y) = \tilde{\Phi}(x, y) - A_0 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(e^{-\sqrt{\sigma_2^2 - k_2^2} y} - e^{-\sigma_2 y} \right) e^{i\sigma_2 x}$$

$$w_0(x) = (\theta(x+a) - \theta(x-a))w(x, 0), \quad w_1(x, 0) = (\theta(-x-a) + \theta(x-a))w(x, 0)$$

$$U_3^{(1)}(x) = (\theta(x+a) - \theta(x-a))u_3^{(1)}(x), \quad \theta(x) - \text{функция Хевисайда.}$$

Тогда граничная задача (2), (3) запишется в виде

$$\Delta w + k_2^2 w = 0, \quad \Delta \Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \Delta w, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty \quad (6)$$

$$c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau_0(x), \quad \Phi \Big|_{y=0} = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (7)$$

а граничная задача (4), (5) в виде

$$\frac{d^2 U_3^{(1)}}{dx^2} + k_1^2 U_3^{(1)} = -\frac{1}{hG_1} \tau_0(x) + u_3^{(1)}(-a) \delta'(x+a) - u_3^{(1)}(a) \delta'(x-a) \quad (8)$$

где $\tau_0(x) = (\theta(x+a) - \theta(x-a))\tau(x)$, $\delta'(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}$, $\delta(x)$ - функция Дирака.

Условия контакта $u_3(x, 0) = u_3^{(1)}(x)$, $|x| < a$ запишутся в виде

$$U_3^{(1)}(x) = w_0(x) + A_0 (\theta(x+a) - \theta(x-a)) e^{i\sigma_2 x} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (9)$$

Применив к (6), (7), (8), (9) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{w} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{w} \right) \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_0(\sigma) = c_{44} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \Big|_{y=0} + e_{15} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad \bar{\Phi}(\sigma, 0) = 0 \quad (11)$$

$$(k_1^2 - \sigma^2) \bar{U}_3^{(1)}(\sigma) = -\frac{1}{hG_1} \bar{\tau}_0(\sigma) + i\sigma (u_3^{(1)}(a) e^{i\sigma a} - u_3^{(1)}(-a) e^{-i\sigma a}) \quad (12)$$

$$\bar{U}_3^{(1)}(\sigma) = \bar{w}_0(\sigma, 0) + 2A_0 \frac{\sin[(\sigma + \sigma_n)a]}{\sigma + \sigma_n} \quad (13)$$

где $\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$, $-\infty < \sigma < \infty$.

Из (12), (13) получим

$$\bar{w}_0(\sigma, 0) = -\frac{1}{hG_1} \frac{\bar{\tau}_0(\sigma)}{k_1^2 - \sigma^2} + \frac{i\sigma (u_3^{(1)}(a) e^{i\sigma a} - u_3^{(1)}(-a) e^{-i\sigma a})}{k_1^2 - \sigma^2} - 2A_0 \frac{\sin[(\sigma + \sigma_n)a]}{\sigma + \sigma_n} \quad (14)$$

С другой стороны, решив граничную задачу (10), (11), получим

$$\bar{w}(\sigma, y) = \bar{w}_0(\sigma, y) + \bar{w}_1(\sigma, y) = -\frac{\bar{\tau}_0(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y}}{B \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma|} \quad (15)$$

$$\bar{\Phi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\bar{\tau}_0(\sigma)}{[B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma|]} \left(e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} - e^{-\sigma y} \right) \quad (16)$$

Как видно из (15), (16), для решения задачи надо определить $\bar{\tau}_0(\sigma)$. Для этого, используя (14) и (15), получим

$$\bar{K}(\sigma)\bar{\tau}_0(\sigma) = 2A_0 \frac{\sin[(\sigma + \sigma_n)a]}{\sigma + \sigma_n} + \frac{i\sigma(u_3^{(1)}(a)e^{i\sigma a} - u_3^{(1)}(-a)e^{-i\sigma a})}{\sigma^2 - k_1^2} \quad (17)$$

где
$$\bar{K}(\sigma) = \frac{1}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma|} + \frac{1}{hG_1(\sigma^2 - k_1^2)}$$

Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, необходимо, чтобы параметр σ , изменяющийся на действительной оси, обходил точки $-\sigma_n, -k_1, -k_2$ сверху, а точки $-\sigma_n, k_1, k_2$ снизу. При этом $\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} = -i\sqrt{k_2^2 - \sigma^2}$ во всей комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ [3].

Заметим, что из (12) получаются условия

$$\frac{1}{hG_1} \bar{\tau}_0(k_1) = ik_1(u_3^{(1)}(a)e^{ik_1 a} - u_3^{(1)}(-a)e^{-ik_1 a}) \quad (18)$$

$$\frac{1}{hG_1} \bar{\tau}_0(-k_1) = -ik_1(u_3^{(1)}(a)e^{-ik_1 a} - u_3^{(1)}(-a)e^{ik_1 a}) \quad (19)$$

$$-\frac{1}{hG_1} \bar{\tau}_0(0) = k_1^2 \bar{U}_3^{(1)}(0), \quad \bar{U}_3^{(1)}(0) = \int_{-a}^a u_3^{(1)}(x) dx \quad (20)$$

Теперь приступим к определению $\bar{\tau}_0(\sigma)$. Для этого, применив к (17) обратное преобразование Фурье, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(K_0(k_2|x-s|) + \frac{i}{2k_1 hG_1} e^{ik_1|x-s|} \right) \tau(s) ds = A_0(\theta(x+a) - \theta(x-a))e^{i\sigma_n x} + \quad (21)$$

$$+ \frac{1}{2} (u_3^{(1)}(a) \operatorname{sgn}(x-a)e^{ik_1|x-a|} - u_3^{(1)}(-a) \operatorname{sgn}(x+a)e^{ik_1|x+a|}) - w_1(x, 0), \quad (-\infty < x < \infty)$$

где
$$K_0(k_2|x|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\sigma(k_2|x|)}}{B\sqrt{\sigma^2 - 1} - A|\sigma|} d\sigma$$

Далее, требуя, чтобы уравнение (21) имело место только при $|x| < a$, получим интегральное уравнение относительно $\tau(x)$ в виде

$$\int_{-a}^a \left(K_0(k_2|x-s|) + \frac{i}{2k_1 hG_1} e^{ik_1|x-s|} \right) \tau(s) ds = A_0 e^{i\sigma_n x} - \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} e^{ik_1|x|} (u_3^{(1)}(a)e^{-ik_1|x|} + u_3^{(1)}(-a)e^{ik_1|x|}), \quad |x| < a, \quad k_1^* = k_1 a$$

Для решения интегрального уравнения (22) исследуем $K_0(k_2|x|)$. Так как

$$\bar{K}_0(\sigma) = (B\sqrt{\sigma^2 - 1} - A|\sigma|)^{-1} \quad \text{при } |\sigma| \rightarrow \infty \text{ имеет вид}$$

$$\bar{K}_0(\sigma) = \frac{1}{c_{44}|\sigma|} + \frac{B}{2c_{44}^2|\sigma|^3} + \frac{B}{8c_{44}^2} \left(1 + \frac{2B}{c_{44}}\right) \frac{1}{|\sigma|^5} + O(|\sigma|^{-7})$$

то $K_0(k_2|x|)$ при $k_2|x| \rightarrow 0$ можно представить в виде [4]

$$K_0(k_2|x|) = \frac{1}{c_{44}\pi} \left(\ln \frac{1}{|k_2x|} + C \right) - \frac{B}{2c_{44}^2} \frac{(k_2x)^2}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|k_2x|} + C + 1 + \frac{1}{2} \right) + \\ + \frac{B}{8c_{44}^2} \left(1 + \frac{2B}{c_{44}}\right) \frac{(k_2x)^4}{24\pi} \left(\ln \frac{1}{|k_2x|} + C + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + O((k_2x)^6 \ln|k_2x|)$$

при $k_2|x| \rightarrow 0$ (23)

где $C = \int_0^1 \bar{K}(\sigma) d\sigma + \int_1^\infty \left(\bar{K}(\sigma) - \frac{1}{c_{44}\sigma} \right) d\sigma - \gamma$, $\gamma = 0.5772157$ — постоянная

Эйлера.

Из (23) следует, что $c_{44}K_0(k_2|x|) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{1}{|k_2x|} + C \right) + K_1(k_2|x|)$, где

$K_1(k_2|x|)$ имеет квадратично интегрируемую вторую производную.

Далее, после замены в (22), x на ax_1 , s на as , продифференцировав обе части уравнения (22) по переменной x , для определения $\tau(ax)$ получим сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-x} - \lambda^* \operatorname{sgn}(x-s) + R(x,s) \right] \tau(as) ds = \\ = A_0 c_{44} i \sigma_n^* e^{i\sigma_n^* x} - \frac{c_{44} i k_1^*}{2} \left(u_3^{(1)}(a) e^{ik_1^*(1-x)} - u_3^{(1)}(-a) e^{ik_1^*(1+x)} \right), \quad |x| < 1$$
(24)

где

$$\sigma_n^* = \sigma_n a, \quad \lambda^* = c_{44} a / 2hG_1, \quad R(x-s) = \frac{\partial}{\partial x} K_1(k_2^*|x-s|) - \lambda^* \left(e^{ik_2^*|x-s|} - 1 \right) \operatorname{sgn}(x-s)$$

где $k_2^* = k_2 a$.

Имея в виду, что $\tau(ax)$ имеет квадратичную особенность при $x = \pm 1$ [5], решение уравнения (24) ищем в виде [6]

$$\tau(ax) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) \right)$$
(25)

где $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ — многочлены Чебышева первого рода.

Подставив выражение $\tau(as)$ из (25) в (24) и используя соотношение [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(s)}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} ds = U_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad |x| < 1$$

где $U_{k-1}(x) = \sin(k \arccos x) / \sin(\arccos x)$ — многочлены Чебышева второго рода, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n U_{k-1}(x) - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^1 R(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = f(x), \quad |x| < 1 \quad (26)$$

где $f(x) = A_0 i \sigma_n^* c_{44} e^{i \alpha_n^* x} - \frac{c_{44} i k_1^*}{2} \left(u_3^{(1)}(a) e^{i k_1^* (1-x)} - u_3^{(1)}(-a) e^{i k_1^* (x+1)} \right)$.

Далее умножив обе части равенства (26) на $\sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x)$ и имея в виду, что

$$\int_{-1}^1 U_{k-1}(x) U_{m-1}(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & k = m \end{cases}$$

получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$a_m + \sum_{k=1}^{\infty} (K_{m,k} + R_{m,k}) a_k = f_m + a_0 \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (27)$$

где $f_m = 2A_0 c_{44} (-i)^m J_m(\sigma_n^*) + (-i)^m e^{i k_1^*} c_{44} \left[u_3^{(1)}(a) J_m(-k_1^*) + u_3^{(1)}(-a) J_m(k_1^*) \right]$

$\varphi_m = \frac{2}{\pi} R_{m,0} + 2\pi \lambda^* \delta_{m,1}$, $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\delta_{m,1}$ — символ Кронекера,

$$R_{m,k} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(x-s) \frac{T_k(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx$$

$$K_{m,k} = \frac{4}{\pi} \lambda^* \begin{cases} \frac{2m[1+(-1)^{k-m}]}{[k^2 - (m-1)^2][k^2 - (m+1)^2]}, & k \neq m-1, k \neq m+1 \\ 0, & k = m-1, k = m+1 \end{cases}$$

Таким образом задача свелась к решению линейной бесконечной системы уравнений (27) с условиями (18), (19), (20). Доказательство квазиполной регулярности бесконечной системы (27) аналогично доказательству, приведенному в работе [4], поэтому здесь оно не приводится. Очевидно, что после определения a_m из (27), (18), (19), (20) или же, если считать в (25) a_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) известными, после применения к (25) преобразование Фурье, получим искомого $\bar{\tau}_0(\sigma)$ в виде

$$\bar{\tau}_0(\sigma) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i k \frac{\pi}{2}} J_k(\sigma)$$

Тогда из (15), (16) получим

$$w(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}_0(\sigma) e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma x}}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma|} d\sigma \quad (28)$$

$$\Phi(x, y) = -\frac{e_{12}}{\varepsilon_{11}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}_0(\sigma) \left(e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} y - i\sigma y} \right) e^{-i\sigma x}}{B\sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - A|\sigma|} d\sigma$$

Поскольку $\pm\sigma_n$ являются простыми нулями знаменателя подынтегрального выражения (28), то можно определить значение $w(x, 0)$ в поверхностной волне, которая распространяется в положительном направлении оси x (приходящая волна), и в отрицательном направлении оси x (отраженная волна).

$$w_{\text{пр}}(x, 0) = -i \frac{(B^2 - A^2)}{A} \bar{\tau}_0(-\sigma_n) e^{i\sigma_n x}, \quad x > 0$$

$$w_{\text{от}}(x, 0) = i \frac{(B^2 - A^2)}{A} \bar{\tau}_0(\sigma_n) e^{-i\sigma_n x}, \quad x < 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилянский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Изд. Наука, 1982. 240с.
2. Саркисян Л.В. О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен упругий проводящий слой. Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т. 50, №3-4, с.115-119.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. -М.: ИЛ, 1962. 280с.
4. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. -ПММ, т.38, №2. 1974.
5. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. -ПММ, 1968, т. 32, №4.
6. Arutunian N.K., Mkhitarian S.M. Some Contact Problems for a Semi-plane with Elastic Stiffeners. In: Trends in Elasticity and Thermoelasticity Withold Nowacki Anniversary Volume, Walters-Noordhoff Publishing, 1971.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4.-М.: Физматгиз, 1962.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
28.06.1999