

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ
 ВНЕЗАПНОМ ПРИЛОЖЕНИИ НАГРУЗКИ ¹

Мовсисян Л.А.

L.A. Movsisian

Չորի կայունության մի դեպքի մասին բնօրինակ համկարծակի կիրառման դեպքում
 ֆիզիկական է առածգական ծողի վարքը, երբ նրա մի ծայրն անբացված է, իսկ մյուս ծայրին
 հանկարծակի կիրառվում է բեռ և այն պահպանվում է:

L.A. Movsisian

Stability of a bar in case of sudden applying of load to it

Исследуется поведение упругого стержня, когда на одном конце прилагается сжимающая сила и в дальнейшем удерживается постоянной.

Впервые такая задача рассматривалась в [1]. Здесь проблема обсуждается совершенно с другой точки зрения: относительно невозмущенного и возмущенного движений никаких упрощающих предположений не делается. Во-первых, учитывается неоднородность сжимающей силы по длине стержня (волновой процесс начального состояния) и во-вторых, принимается иной критерий потери устойчивости.

Итак, пусть имеется упругий прямолинейный стержень, на одном конце которого внезапно прилагается сжимающая сила P_0 и поддерживается постоянной, а другой его конец неподвижен. Рассмотрим сначала невозмущенное движение. Уравнение движения и соответствующие краевые и начальные условия будут:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.1)$$

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = -P_0 H(t) \text{ при } x = l$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0 \quad (1.2)$$

Обозначения общепринятые, поэтому не приводятся.

Решение (1.1)-(1.2) представим двояким образом, т.к. и возмущенное движение также будем изучать двояким образом.

Истинная картина напряженного состояния следующая.

Решение (1.1)-(1.2) операционным методом дает в зависимости от координаты и времени для продольной силы в стержне

¹ Публикуется с целью дискуссии.

$$\frac{P(y, \tau)}{P_0} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \tau < -y+1 \\ 1 & \text{при } 1-y < \tau < y+1 \\ 2 & \text{при } y+1 < \tau < -y+3 \\ 1 & \text{при } -y+3 < \tau < y+3 \\ 0 & \text{при } y+3 < \tau < -y+5 \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь y и τ — безразмерные координаты; $y = x/l$, $\tau = at/l$, l — длина стержня (положительный знак при P приписывается сжимаемому напряжению).

Рассматривая (1.3), замечаем периодичность изменения сжимающей силы с периодом $\tau = 4$ ($\tau = 1$ — время прохождения упругой волны с одного конца в другой). С этой точки зрения эта задача будет похожа на задачу параметрического резонанса при пульсирующей силе [2]. Как известно, в такой задаче главный параметрический резонанс получается, когда частота внешней нагрузки равна двойным собственным частотам изгибных колебаний балки.

Конечно, в настоящей задаче частота изменения сжимающей силы уже задана и не удовлетворяет этому условию. Однако, не лишено смысла попробовать возможность параметрических колебаний в данном случае и, самое главное, определение динамических форм потери устойчивости в зависимости от величины приложенной силы.

2. Уравнением возмущенного движения будет

$$\frac{J}{Fl^2} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1}{EF} \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.1)$$

Будем рассматривать балку с шарнирными концами: $w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ и решение (2.1) будем искать

$$\dot{w} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi y \quad (2.2)$$

По аналогии задачи устойчивости при пульсирующей силе будем предполагать сжимающую силу постоянной, но различной для различных интегралов времени. Здесь примем

$$P = P_0 \text{ при } 0 < \tau < 1, \quad 3 < \tau < 4$$

$$P = 2P_0 \text{ при } 1 < \tau < 3 \text{ и т.д.} \quad (2.3)$$

Как показывает дальнейшее исследование, такое осреднение (например, вместо $P = P_0$ при $0 < \tau < 1$ принимать $P = 0.5P_0$) не существенно влияет на конечные качественные выводы. Тогда из (2.1)–(2.3) получим

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \omega_m^2 \left(1 - \frac{P_0}{m^2 P_0} \right) f_m = 0, \quad 0 < \tau < 1, \quad 3 < \tau < 4$$

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2 \left(1 - \frac{2P_0}{m^2 P_3} \right) f_m = 0, \quad 1 < \tau < 3 \quad (2.4)$$

Здесь $P_3 = EJ\pi^2/l^2$, $\omega_m = i\pi^2 m^2$, $i = \sqrt{J/FI^2}$ — гибкость стержня.

Система (2.4) решается просто, а вопрос об устойчивости ставится обычным образом [2]. В предположении, что в начальный момент балке сообщены начальные отклонения и начальную скорость

$$w(y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin m\pi y, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\pi y \quad (2.5)$$

потребовав, чтобы решение (2.4) удовлетворяло начальным условиям (2.5) и условиям непрерывности при $\tau = 1$ и $\tau = 3$, а также в конце периода $\tau = 4$ прогиб и его скорость были в n раз больше, чем начальные, относительно n получим квадратное уравнение ([2], 6.104, с.256). Из условия действительности корней этого уравнения определяются границы, разделяющие области устойчивости и неустойчивости. Вот это условие для настоящего случая:

$$\cos \Omega_1 \cos \Omega_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \sin \Omega_1 \sin \Omega_2 = \pm 1 \quad (2.6)$$

$$\text{где } \Omega_1 = 2\omega_m \left(1 - \frac{\alpha}{m^2} \right), \quad \Omega_2 = 2\omega_m \left(1 - \frac{2\alpha}{m^2} \right), \quad \alpha = \frac{P_0}{P_3} \quad (2.7)$$

Можно поступить следующим образом: задать α и i и определить m , удовлетворяющие условиям (2.6), т.е. определить динамическую форму потери устойчивости для заданного отношения P_0/P_3 (например, при $\alpha \rightarrow 0$ аналогично главному параметрическому резонансу, получим $2i\pi m^2 = 1$, которое для стержня прямоугольного сечения $l \times h$ дает $hm^2/l = \pi/1.14$). Однако, исследование уравнения (2.6) для большого числа параметров i и m показывает, что выражение правой его части не может превысить единицы по абсолютному значению, т.е. или для заданного α не существует m , по которому происходит потеря устойчивости, или здесь невозможно явление типа параметрических колебаний. Дальнейшее исследование показывает, что, во-первых, явление типа параметрических колебаний имеет место и, во-вторых, потеря устойчивости не может происходить по целочисленным полуволам m [1], хотя бы отличными для статики и динамики, что и подтвердили многочисленные экспериментальные данные. Что такое явление (параметрические колебания) возможно, показывает и изменение перемещения во времени на конце приложения силы. Оно изменяется пилообразно с периодом $\tau = 4$ и амплитудой $2P_0 l / EF$.

3. Давайте изучим проблему с другой точки зрения: уравнению (2.1) и всем условиям удовлетворим точно. С этой целью решение (1.1)-(1.2) представим в виде разделения переменных. Тогда выражение сжимающей силы будет

$$P = P_0 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \cos \lambda_k \tau \cos \lambda_k y \right), \quad \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad (3.1)$$

В работе [3] была изучена устойчивость стержня при ударе бесконечной массой со скоростью c . Тогда для сжимающей силы имеем

$$P = EF \frac{c}{a} \left[\tau + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin k\pi\tau \cos k\pi y \right] \quad (3.2)$$

и для изучения поведения стержня для неизвестных $f_m(\tau)$ из (2.2) получилась бесконечная система с начальными условиями. При (3.1) получить аналогичную систему невозможно, но Дело в том, что до $\tau = 2$ выражение сжимающей силы по (3.1) и (3.2) одинаковые, если принять $P_0 = EFc/a$. Поэтому будем пользоваться рядом (3.2) с оговоркой. Если обратить внимание на (3.1), то можно заметить, что ряд (3.2), который пригоден для $\tau \leq 2$, для того, чтобы он был пригодным и для $\tau > 0$, достаточно принять условие

$$\begin{aligned} a_k(2p + \tau_1) &= a_k(2p - \tau_1), \quad p = 1, 2, \dots, \tau_1 < 2 \\ a_0 &= \tau, \quad a_k = (-1)^k \frac{\sin k\pi\tau}{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя (2.2) и (3.2) в (2.1), получим систему

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \pi^4 I^2 \left\{ \left[m^4 - \alpha m^2 \left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2} \right) \right] f_m - \alpha \frac{m}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} (a_{m+k} + a_{m-k}) k f_k \right\} = 0 \quad (3.4)$$

с соответствующими начальными условиями. Если стать на точку зрения определения критического времени потери устойчивости (критической длины) [3], то по критерию, если потеря устойчивости не происходит до $\tau \leq 2$, то и в дальнейшем не может происходить, а для $\tau \leq 2$ оно будет то же самое, что и в [3], лишь с той разницей, что EFc/a нужно заменить на P_0 .

Система (3.4) интегрировалась численно для стержня прямоугольного сечения для различных $\alpha, h/l$ и начальных условий. Некоторые результаты представлены на фиг.1-6. Данные для различных τ указаны на фигурах. Начальные отклонения сообщены в виде одной (фиг.1,2,4,5) и двух (фиг.3,6) полуволн, начальные скорости нулевые. Для сравнения на фиг.2 приведены кривые возрастания прогибов без дополнительного условия (3.3), т.е. как и в [3], когда нагрузка возрастает ступенчато.

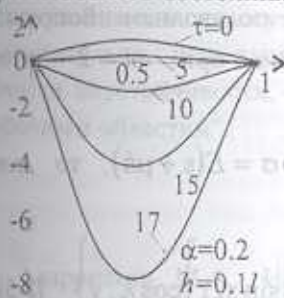
Приведенные кривые позволяют сделать несколько общих выводов.

1. Во-первых, наличие явления типа параметрических резонансов. Иначе, при $\alpha = 0.2$ не было бы возрастания прогибов (фиг.1,3).

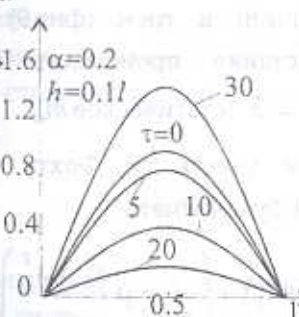
2. Происходит трансформация формы движения. На фиг.1 приведены кривые, когда сообщалось начальное отклонение в виде одной полуволны.

а на фиг.3—двум. Как видно из фигур, не может быть потери устойчивости по целочисленным полуволнам.

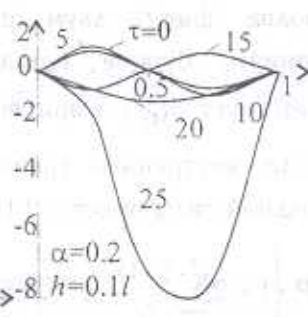
3. В зависимости от h/l и α колебание системы в начальной стадии и в дальнейшем ее возрастание не всегда может совершаться вокруг равновесного состояния.



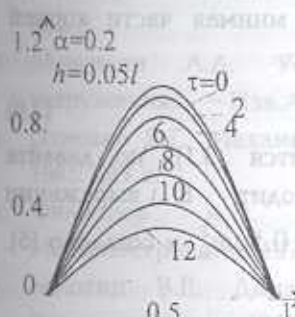
Фиг. 1



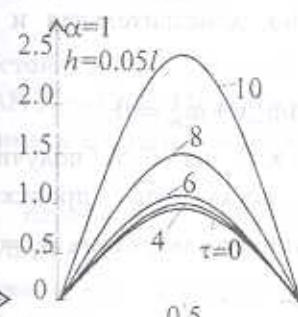
Фиг. 2



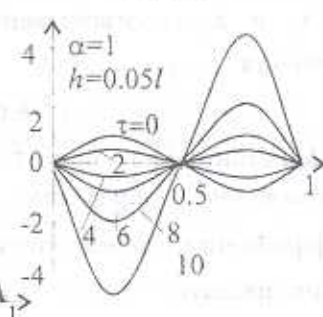
Фиг. 3



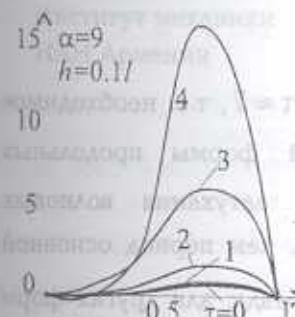
Фиг. 4



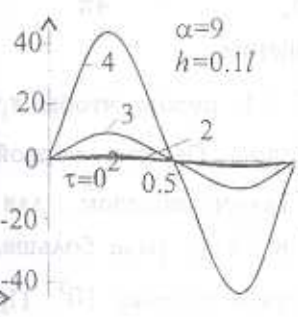
Фиг. 5



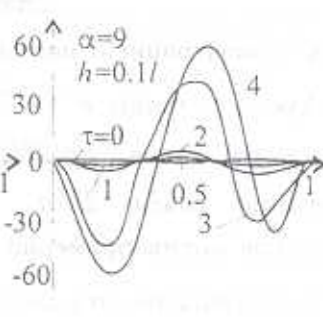
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

В [4] предположение постоянства сжимающей силы вместо (1.3) обосновывается тем, что есть затухание и ею можно пользоваться "... лишь по истечении некоторого (конечно, весьма небольшого) промежутка времени, необходимого для затухания волновых процессов" (стр.251).

Критерию потери устойчивости $d\Omega/dm = 0$ по [1], откуда и находятся динамические формы потери устойчивости $m_{кр}^{(1)} = \sqrt{\alpha/2}$ (в отличие от статики — $m_{кр}^{(2)} = \sqrt{\alpha}$), можно трактовать как бы равенство

нулю "групповой скорости", а $m_{кр}^{(i)}$, как форма, по которой возрастание прогибов совершается быстрее и близкое к истинной форме (не целочисленное m). С этой целью были произведены вычисления для $\alpha = 9$, когда начальные отклонения сообщаются, соответственно, одной полуволне (фиг.7), двум (фиг.8) и трем (фиг.9) полуволнам. Вопреки ожиданиям, бурное возрастание происходит не при $m = 2$ (что соответствует $m_{кр}^{(i)}$), а при $m = 3$ (статическое m).

Если внутреннее трение учесть по Фохту $\sigma = E(\varepsilon + \mu \dot{\varepsilon})$, то для продольной силы вместо (3.1) будем иметь

$$P = P_0 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_k} e^{-s_1 \tau} \left[\cos s_2 \tau + \left(\frac{s_1}{s_2} - \mu \frac{s_1^2 + s_2^2}{s_2} \right) \sin s_2 \tau \right] \cos \lambda_k y \right\} \quad (3.5)$$

где s_1 и s_2 — соответственно, действительная и мнимая части корней уравнения

$$s^2 + \mu \omega_m^2 s + \omega_m^2 = 0 \quad (3.6)$$

Действительно, при $\tau \rightarrow \infty$ из (3.5) получится (3.1), но давайте приближенно определим, когда это происходит. В выражении коэффициента, характеризующего затухание $s_1 = 0.5\mu\omega_m^2$ и согласно [5], нужно принять

$$\mu = \frac{\psi}{2\pi\omega_m}, \quad \text{т.е. } s_1 = \frac{\psi\omega_m}{4\pi} \quad (3.7)$$

где ψ — коэффициент поглощения.

Для того, чтобы $e^{-s_1(m-1)\tau} \approx 1$, нужно, чтобы $s_1 \tau \approx 7$, т.е. необходимое для этого время $t = 28l/\psi a$. Период первой формы продольных колебаний равен $2l/a$. Таким образом, для затухания волновых процессов время примерно в $14/\psi$ раза больше, чем период основной формы колебания, это для стали порядка 10^3 . Правда, для других форм отношение это будет меньше, но тем не менее Ведь потеря устойчивости или бурное возрастание прогибов происходит в интервале времени во много раз меньше, чем последнее выражение.

Вычисления проведены Г.Нерсисяном, за что приношу благодарность.

От р е д а к ц и и. По мнению рецензента, возрастание прогибов при сжимающей силе меньше эйлеровой, скорее связано с неправильными расчетами, и хотя периодическое изменение сжимающей силы имеется, "то в этом случае должны нарастать только высокие моды".

От автора. Во-первых, кто осуществил такой эксперимент – внезапно прилагается сила и в дальнейшем удерживается постоянной (подчеркиваю – прилагается сила) и, во-вторых, сам рецензент не отрицает существования комбинированных или побочных резонансов, но, как правило, для реальных систем их не рассматривают, т.к. считается, что из-за затухания они не осуществимы. Не излишне привести фразу [6, с.63]: “Замечательно, что влияние затухания, не существенное для главной области неустойчивости, становится особенно заметным по отношению к побочным областям”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. – ДАН СССР, 1949, т.65, №6, с.779-782.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Мовсисян Л.А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях. – Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1971, т.24, №1, с.38-50.
4. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1985. 287 с.
5. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехтеориздат, 1956. 600 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.07,1999