

УДК 539.3

О ХАРАКТЕРЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ
МЕМБРАНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Белубекян М.В., Минасян М.М.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Մ.Մ. Մինասյան

Գազի գերձայնային հոսանքում անվերջ մեծրանի անկայունության բնույթի մասին
Մեծրանի շրջհոսման խնդիրը դիտարկվում է ավելի ճշգրիտ մոդելի հիման վրա, քան
«խոնարհային» տեսությամբ: Հաստատվում է, որ մեծրանի անկայունությունը ունի կոնվեկտիվ
բնույթ:

M.V. Belubekyan, M.M. Minasyan

On the character of the infinite membrane nonstability in the supersonic gas flow

Задача обтекания мембраны рассматривается на основе модели более точной, чем
"поршневая" теория. Устанавливается, что неустойчивость мембраны имеет конвективный
характер.

В работах авторов [1,2] выведено уравнение изгибных колебаний
пластин и мембран в плоскопараллельном сверхзвуковом потоке
идеального газа в приближении более точном, чем известное "поршневое"
[3,4]. Для мембраны имеем систему уравнений для прогиба $w(x,t)$ и
избыточного давления $p(x,t)$ (рассматривается одностороннее
обтекание):

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + p &= 0 \\ \frac{Dp}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D^2 w}{Dt^2} + \chi \rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначения в системе (1) общеизвестны. χ - некоторый поправочный
коэффициент [2].

В задаче с начальными условиями $w(x,0)$, $w_t(x,0)$, $p(x,0)$ для
бесконечной мембраны, после применений преобразований Фурье по
пространственной координате и Фурье-Лапласа по времени, получим
решение в виде

$$w(x,t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega, k) \exp i(\omega t - kx)}{\Delta(\omega, k)} dk$$

$$\Delta(\omega, k) = (\omega - Uk)(\omega^2 - c^2 k^2 + i\varepsilon_0 Uk - i\omega\gamma) - i\delta k^2$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h}, \quad c^2 = \frac{N}{\rho h}, \quad \delta = \chi \varepsilon_0 a_0^2, \quad \gamma = \varepsilon_0 + \varepsilon \quad (2)$$

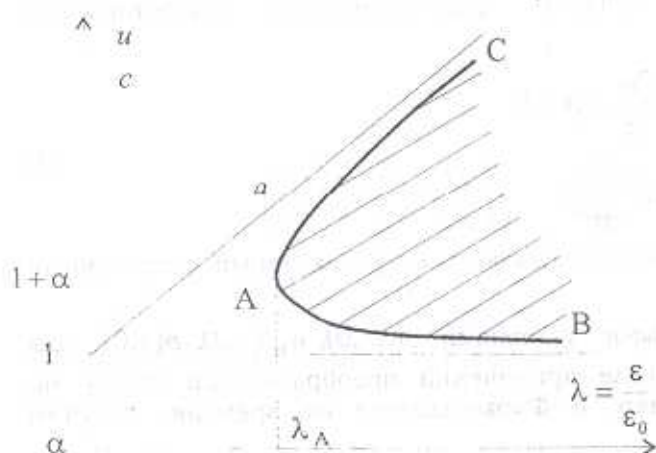
ε_0 представляет аэродинамическое, ε — конструкционное, а γ — полное демпфирования.

Известно, что неустойчивости, связанные с нарастанием возмущений из начальных распределений, подразделяются на конвективные и абсолютные [5]. Имеется ряд исследований, посвященных проблеме таких неустойчивостей [6-11] в различных физических системах. Кроме самостоятельного интереса для неограниченных по протяженности систем определение характера неустойчивости проявляет свет и на характер поведения конечных систем. В частности, установлено, что если бесконечная система абсолютно неустойчива, то соответствующая конечная система неустойчива глобально.

В данной работе в основном будем следовать критериям типов неустойчивостей, изложенных в монографиях [8,9].

В работе [12] критерий абсолютной и конвективной неустойчивостей применено к мембране в "поршневом" приближении. Показано, что неустойчивость имеет конвективный характер. В отличие от этого приближения, когда в системе имеются две волны, здесь мы сталкиваемся с тремя волнами, которые соответствуют трем ветвям многозначной функции $k(\omega)$ в комплексной плоскости ω — решения дисперсионного уравнения $\Delta(k, \omega) = 0$. Эти ветви будем идентифицировать по высокочастотной групповой скорости волн. Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки получим разложения

$$k_j(\omega) \approx \frac{\omega}{v_j} + \dots, \quad v_1 = U, \quad v_2 = c, \quad v_3 = -c \quad (3)$$



Фиг. 1

лена на фиг. 1. Точная область [3] отличается от приведенной здесь положением горизонтальной асимптоты (точка $1+\alpha$ на фиг. 1). Отсчет вертикальной оси начинается в точке $\alpha = c/a_0$. Этому значению α

По принятой терминологии волны, соответствующие ветвям $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$, назовем попутными, а третью волну — встречной. В дальнейшем значения ветвей в конечных точках плоскости ω будем определять путем аналитических продолжений из бесконечной точки в эту точку. Область устойчивости, определенной из дисперсионного уравнения $\Delta(k, \omega) = 0$ [2] представ-

соответствует $M=1$ так, что вся четверть плоскости представляет сверхзвуковую область. Отметим, что "поршневое" приближение определяет область устойчивости, целиком лежащей ниже прямой α .

Интегрируя (2) по k и записывая результат в виде отдельных слагаемых для попутных и встречных волн [9], получим

$$w(x,t) = \frac{i}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \int_{\gamma_s} \frac{F[\omega, k_s(\omega)] \exp[\omega t - k_s(\omega)x] d\omega}{\Delta_{,k}[\omega, k_s(\omega)]} - \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_3} \frac{F[\omega, k_3(\omega)] \exp[\omega t - k_3(\omega)x] d\omega}{\Delta_{,k}[\omega, k_3(\omega)]}, \quad (4)$$

причем, в первых двух интегралах $x > 0$, а в третьем - $x < 0$ (результат замыкания действительной оси плоскости ω для соблюдения условий Жордана). Особенности подынтегральных функций в (4) это суть точки ветвлений функций $k(\omega)$, которые определяются из системы

$$\Delta(\omega, k) = 0, \quad \Delta_{,k}(\omega, k) = 0, \quad (\Delta_{,\omega}(\omega, k) \neq 0) \quad (5)$$

Абсолютная неустойчивость обусловлена наличием точек ветвлений, находящихся в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega < 0$ для пар (k_1, k_3) или (k_2, k_3) . Во всех других случаях неустойчивость имеет только конвективный характер (исключая, конечно дивергенцию). Кроме исследований точек ветвлений, представляет также интерес сильное взаимодействие слабосвязанных волн в окрестности точек синхронизма.

В случае конвективной неустойчивости необходимо определить скорость "сноса" возрастающих возмущений. Как показано в [9], эта скорость определяется применением к интегралу (4) метода стационарной фазы (метод перевала) при следующих условиях: для попутных волн при $x > 0$ необходимо существование промежутка ω с $\text{Im } k(\omega) > 0$ (аналогично для встречных волн с $x < 0$, $\text{Im } k(\omega) < 0$). Стационарная точка ω_0 и скорость "сноса" v_k определяются из условий:

$$\frac{d \text{Im } k(\omega)}{d\omega} = 0, \quad \frac{d \text{Re } k(\omega_0)}{d\omega} = \frac{1}{v_k}, \quad (v_k > 0) \quad (6)$$

Однако может оказаться, что в единственной стационарной точке ω_0 $\text{Im } k(\omega_0) = 0$, хотя и скорость v_k принимает вполне определенное значение. В этом случае из оценки по методу стационарной фазы как будто следует, что в системе наблюдателя, движущегося со скоростью v_k , возмущения исчезают, т.е. нарушается картина конвективной неустойчивости. При такой ситуации следует выяснить знак $\text{Im } k(\omega)$ в окрестности точки ω_0 . Если существует такая окрестность с $\text{Im } k(\omega) > 0$ и при этом групповая скорость, определенная в этих точках больше соответствующей этой скорости в стационарной точке, то это будет означать, что любая скорость, большая чем v_k , будет скоростью "сноса", т.е. в системе, движущейся с такой скоростью, будет наблюдаться нарастание возмущений. Как будет показано ниже, здесь конвективная неустойчивость именно такого рода.

Анализ дисперсионного уравнения весьма трудоемок. Однако, учитывая, что принятое в работе приближение основано на малости δ , то при вычислениях будем применять метод итераций. Система (5), определяющая все особенности в интеграле (4), принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega - Uk)(\omega^2 - c^2k^2 + i\epsilon_0 Uk - i\omega\gamma) &= i\delta k^2 \\ -U(\omega^2 - c^2k^2 + i\epsilon_0 Uk - i\omega\gamma) - (\omega - Uk)(2c^2k - i\epsilon_0 U) &= 2i\delta k \end{aligned} \quad (7)$$

Исключив волновое число в главных выражениях, получим уравнение

$$\omega \left[\omega \left(1 - \frac{c^2}{U^2} \right) - i\epsilon \right]^2 \left[\omega^2 - i\omega\gamma - \frac{\epsilon_0^2 U^2}{4c^2} \right] = \delta \varphi(\omega, k) \quad (8)$$

где $\varphi(\omega, k)$ — многочлен по ω и k . Считая правую часть (8) малой поправкой, в первом приближении будем считать $\delta = 0$. Вычисленные таким образом значения определяют ветви $k_j^0(\omega)$ и особые точки в первом приближении, а в следующем приближении можно уточнять найденные значения. При малости δ следует ожидать, что точки ветвлений, находящиеся на конечном расстоянии от действительной оси в первом приближении, не смогут перейти из полуплоскости $\text{Im}\omega > 0$ в полуплоскость $\text{Im}\omega < 0$, и наоборот. Точка же синхронизма, полученная в первом приближении, в следующем приближении превратится в пару точек ветвлений, расположенных близко к точке синхронизма, относительно которых также можно применить вышеизложенные соображения.

Сначала рассмотрим уравнение

$$\omega^2 - i\omega\gamma - \frac{\epsilon_0^2 U^2}{4c^2} = 0 \quad (9)$$

Решения этого уравнения

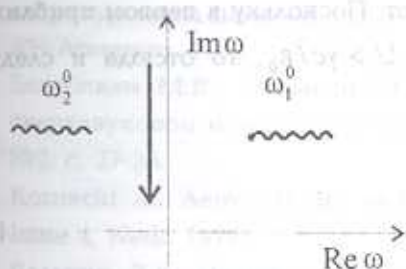
$$\omega_{1,2}^0 = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_0^2 U^2}{4c^2} - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (10)$$

определяют точки ветвления пары $(k_2^0(\omega), k_3^0(\omega))$, представляющих встречные волны. Для этих ветвей имеем:

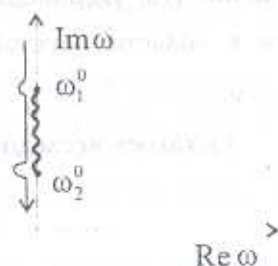
$$k_{2,3}^0(\omega) = \frac{i\epsilon_0 U}{2c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - i\omega\gamma}{c^2} - \frac{\epsilon_0^2 U^2}{4c^2}} \quad (11)$$

На фиг. 2 и 3 представлены точки ветвлений (10) и соответствующие им разрезы, а также пути аналитических продолжений к ним из бесконечной точки. Кроме того, как было сказано выше, возникает необходимость определения значений этих функций в стационарной

точке (здесь $\omega_0 = 0$) и поэтому на фигурах пути продолжений доведены до начала координат.



Фиг. 2



Фиг. 3

Поскольку встречные волны "встречаются" в верхней полуплоскости, то следует, что неустойчивость не абсолютная.

Теперь определим скорость "сноса" нарастающих возмущений. Дифференцируя по ω уравнение для ветвей (11), получим:

$$-2c^2 k \frac{dk}{d\omega} + i\varepsilon_0 U \frac{dk}{d\omega} + 2\omega - i\gamma = 0 \quad (12)$$

Анализ показывает, что единственной стационарной точкой является точка $\omega_0 = 0$, при этом имеем

$$\text{Im } k_2^0(0) = 0, \quad \frac{d}{d\omega} \text{Re } k_2^0(0) = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 U} = \frac{1}{v} > 0 \quad (13)$$

$$\text{Im } k_3^0(0) = \frac{\varepsilon_0 U}{c^2}, \quad \frac{d}{d\omega} \text{Re } k_3^0(0) = -\frac{1}{v}$$

Из всего этого следует, что определенной скорости "сноса" нет. С другой стороны, в точках из некоторой окрестности нуля для попутной волны имеем

$$\text{Im } k_2^0 > 0, \quad \frac{d}{d\omega} \text{Re } k_2^0(\omega) < \frac{1}{v} \quad (14)$$

В таком случае v следует считать минимальной скоростью "сноса". Следующий анализ также подтверждает сказанное. Уравнение, соответствующее дисперсионному уравнению (11) — это уравнение мембраны в поршневом (первом) приближении:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon_0 U \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

Введя новую функцию $u(x, t)$

$$w(x, t) = u(x, t) \exp\left(\frac{\varepsilon_0 U}{2c^2} x - \frac{\gamma}{2} t\right) \quad (16)$$

для нее получится уравнение с ограниченным решением, и тогда из (15) следует, что в системе, движущейся с большей скоростью, чем $\gamma c^2 / \epsilon_0 U$, решение (15) экспоненциально возрастает. Поскольку в первом приближении в области неустойчивости имеем $U > \gamma c / \epsilon_0$, то отсюда и следует $v_k > v$.

Осталось исследовать точку

$$\omega_c^0 = \frac{i\epsilon U^2}{U^2 - c^2} \quad (17)$$

являющейся точкой синхронизма двух волн. В окрестности такой точки даже слабосвязанные волны сильно взаимодействуют. Дисперсионное уравнение для всех ветвей можно представить в виде

$$\prod_{j=1}^3 (k - k_j^0(\omega)) = \delta\phi_1(\omega, k) \quad (18)$$

В первом приближении в точке ω_c^0 получаем $k_1^0 = k_2^0$. При $U > c$ точка лежит в верхней полуплоскости ω , а при $U < c$ — в нижней. С учетом правой части (18), в следующем приближении точка синхронизма расщепляется на две точки ветвлений, в которых "встречаются" попутные волны, соответствующие ветвям $(k_1(\omega), k_2(\omega))$. Это означает, что при $U > c$ синхронизм не порождает неустойчивость, а при $U < c$ порождает конвективную неустойчивость.

Этим и завершаем анализ характера неустойчивости бесконечной мембраны в приближении, следующем за поршневым. Анализ показал, что неустойчивость носит сугубо конвективный характер. Следует ожидать, что к такому же выводу можно прийти и в случае более точного иррационального дисперсионного уравнения, полученного из интегродифференциального уравнения [4], поскольку как по числу волн, так и по качественной схожести областей устойчивости имеем одинаковую картину.

В заключение отметим, что конвективный характер бесконечной мембраны предопределяет устойчивость конечной мембраны, имея в виду конечность времени прохождения возмущений по длине мембраны со "сносной" скоростью. В случае же пластинки имеем по крайней мере пять волн, три из которых попутные, а три — встречные. Естественно, что обилие волн приведет к большим разнообразиям для точек ветвлений и синхронизма. Поскольку известно, что для конечной пластинки имеются флаттерные колебания, то это означает, что либо бесконечная пластинка может быть абсолютно неустойчивой, а если нет, то в этом случае неустойчивость конечной пластинки может быть следствием отражений волн у краев пластинки. Однако обоснование и доказательство сказанного может стать предметом отдельного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Минасян М.М. О взаимодействии мембраны со сверхзвуковым потоком газа.- В кн.: Проб. Взаим. Деформ. Сред. Изд. АН Армении, 1984.
2. Белубекян М.В., Минасян М.М. К проблеме флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке газа.- Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №2, с. 27-35.
3. Kornecki A., Aeroelasticity and Hydroelasticity Instab. II SM Arch, V.4, Issue 4, Neth. 1979.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. - М.: Физматгиз, 1961.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика т. 6.- М.: Наука, 1986.
6. Sturrok P.A. Rhys. Review. vol.112, 1959.
7. Briggs R.S. Electron-stream interaction with plasmas. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1964.
8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физ. Кинетика. т.10,- М.: Наука, 1979.
9. Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах.- М.: Наука, 1981.
10. Половин Р.В. ЖТФ, т. 31, 1961.
11. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний.-ПИММ, 1966. т.30.
12. Белубекян М.В., Минасян М.М. Об усилениях волн при обтекании мембраны сверхзвуковым потоком газа.-Механика, Межвуз. сб. науч. трудов. вып.2, ЕГУ, Ереван, 1982, с.44-49.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
7.12.1999