ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №3, 2000 Механика

УДК 539.3

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПОДВИЖНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Саакян А.В.

Ա.Վ. Սահակյան

Դիսկրետ եզակիությունների մեթոդի կիրառությունը անշարժ եզակիությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար

Առաձգականության տեսության խառը եզրային, մասնավորապես կոնտակտային խնդիրները հաճախ բերվում են Կոշու ընդհանրացված կորիզով՝ անշարժ եզակիությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը: Նման հավասարումների լուծումը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ:

Ներկա աշխատանքում ցույց է տրված նշված տիպի հավասարումների լուծման համար դիսկրետ եզակիությունների մեթոդի կիրառության հնարավորությունը և արդյունավետությունը:

A.V. Sahakyan

Application of the method of discrete singularities for solving the singular integral equations with unmoved singularities

Смешанные, в частности, контактные задачи теории упругости нередко сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши, называемых также уравнениями с неподвижной особенностью. Решение этих уравнений связано с определенными трудностями.

В настоящей работе получены квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для сингулярных интегралов и показана эффективность их применения для решения подобных уравнений.

1. Применение квадратурных формул типа Гаусса к решению сингулярных интегральных уравнений различного типа представлено в работе [1]. Эта работа имеет важное значение в силу обширности представленного материала, удачного подбора задач для представления методов исследования поведения решений в особых точках и решения сингулярных интегральных уравнений различного типа. Однако, к сожалению, в указанной работе отсутствует единая методика и сведение сингулярных интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений носит преимущественно необоснованный характер, поскольку квадратурные формулы типа Гаусса, применяемые для обычных интегралов, формально принимаются верными и для сингулярных интегралов. В работе показана правомерность последнего утверждения для нескольких конкретных весовых функций и это, по-видимому, послужило основанием для обобщения на более широкий класс весовых функций. В случае же сингулярных интегральных уравнений второго рода, ввиду невозможности такого формального подхода, представлен совершенно иной метод — метод ортогональных многочленов.

Метод дискретных особенностей является универсальным способом получения квадратурных формул наивысшей алгебраической точности для сингулярных интегралов с весовой функцией

$(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ $(\mathrm{Re}(\alpha,\beta)>-1)$. Применение метода дискретных особенностей к решению сингулярных интегральных уравнений второго рода с действительным коэффициентом при свободном члене показано в работе [2], а с комплексным коэффициентом - в работе [3]. Отметим, что для сингулярных интегральных уравнений первого рода получаемая система алгебраических уравнений полностью совпадает с приведенной в работе [1].

Принимая основополагающий характер работы [1], в настоящей работе будем следовать ее положениям и проведем сравнение с ее результатами. Поскольку здесь производится сравнение не с точным, а приближенным решением, то приведем также решение задачи для полуплоскости с краевой трещиной, которая сводится к подобному уравнению и решена точно [6].

2. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши, в общем случае имеющее следующий вид:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(t)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}K(x,t)\Phi(t)dt+\int_{-1}^{1}k(x,t)\Phi(t)dt=f(x)\qquad(-1<x<1)\tag{1}$$

где $k(x,t)$ - фредгольмовское ядро, $f(x)$ – заданная непрерывная функция, а $K(x,t)$ определяется формулой

$$K(x,t)=\sum_{0}^{N}c_k(x+1)^k\frac{d^k}{dx^k}(t-z_1)^{-1}+\sum_{0}^{M}b_j(1-x)^j\frac{d^j}{dx^j}(t-z_2)^{-1}$$

$$z_1=-1+(x+1)e^{i\theta_1},\quad z_2=1+(1-x)e^{i\theta_2}$$

$$-1<(x,t)<1,\ 0<\theta_1<2\pi,\ -\pi<\theta_2<\pi$$

Если функция $\Phi(x)$ имеет интегрируемую особенность на обоих концах отрезка интегрирования, то к уравнению (1) следует добавить условие вида

$$\int_{-1}^{1}\Phi(t)dt=C\tag{2}$$

Исследовав поведение функции $\Phi(x)$ у концов отрезка интегрирования, представим ее в виде

$$\Phi(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}g(t)\qquad(|t|<1,\ \ \mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)>-1)\tag{3}$$

где функция $g(t)$ ограничена и удовлетворяет условию Гельдера на замкнутом интервале [-1,1].

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$I(z)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-z}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,\qquad z\neq-1,z\neq1\ \ \mathrm{Re}\,\alpha,\mathrm{Re}\,\beta>-1\tag{4}$$

где $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера на отрезке [-1,1], а в случае комплексных α и β допускающая аналитическое продолжение в комплексную плоскость.

Для вычисления интеграла $I(z)$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим следующим интерполяционным многочленом [4]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_i) P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)} \qquad (5)$$

где $f_i = f(\xi_i)$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ – корни многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Подставляя (5) в (4), меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$I(z) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)} \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(x-z)(x-\xi_i)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{(\xi_i - z) P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)} \left[\int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(x-\xi_i)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(x-z)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx \right]$$

Далее, используя известное [5] интегральное соотношение для полиномов Якоби

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-z} dx = Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) \qquad (z \neq \pm 1)$$

где

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{z-1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times \\ \times F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \dfrac{2}{1-z}\right) & z \notin [-1,1] \\ \left(Q_n^{(\alpha,\beta)}(z+i0) + Q_n^{(\alpha,\beta)}(z-i0)\right)/2 & (-1 < z < 1) \end{cases}$$

и учитывая, что

$$P_n'^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z)$$

получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-z}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\,\frac{f(\xi_i)}{\xi_i - z}\left[1-q_i(z)\right], \tag{6}$$

$(z \neq \pm 1,\ \mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > -1)$

где

$$w_i = \frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\,\frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i)}, \qquad q_i(z) = \frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)} \tag{7}$$

Отметим, что интегральное соотношение верно во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка [-1,1], при этом для многозначной функции $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ выбрана та ветвь, которая на действительной полуоси $x>1$ принимает положительные значения.

Совершенно аналогичным путем можно получить

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad \mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > -1 \tag{8}$$

Формулы (6) и (8) являются квадратурными формулами наивысшей алгебраической точности. При этом формула (6) выполняется точно, если функция $f(x)$ является многочленом порядка (n-1) и меньше, а формула (8) – многочленом порядка ($2n$-1) и меньше.

Следовательно, используя последние формулы, главную часть уравнения (1), представляемую первыми двумя интегралами, и левую часть условия (2) можно заменить максимально близкими к ним квадратурными суммами, не налагая при этом никаких ограничений на выбор точек x_k $(k = 1, n-1)$, необходимых для приравнивания с правой частью уравнения.

Для регулярной части уравнения (1), представляемой третьим интегралом, предполагая достаточную гладкость фредгольмовского ядра $k(x,t)$ и по x и по t, можно использовать следующую формулу:

$$\int_{-1}^{1} k(x,t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} g(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{n} w_i k(x,\xi_i) g(\xi_i) \quad \mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > -1 \tag{9}$$

Таким образом, заменяя интегралы указанными квадратурными формулами и приравнивая обе части уравнения (1) в (n-1) точках, разрешаемое сингулярное интегральное уравнение сведем к системе алгебраических уравнений. Получаемая система алгебраических уравнений здесь не приводится, поскольку описанная процедура более наглядно представлена ниже на конкретном примере.

3. С целью показать применимость и результативность метода дискретных особенностей к решению сингулярных интегральных уравнений с

неподвижной особенностью повторим решение задачи, приведенной в работе [1], для составной упругой плоскости, состоящей из двух полуплоскостей, в одной из которых содержится перпендикулярная к линии соединения и выходящая на нее трещина. Решение задачи для упругой полуплоскости с выходящей на границу трещиной, к берегам которой приложена равномерная нормальная нагрузка [6], приведем параллельно с основным изложением.

Согласно [1] имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{F(t)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}K(x,t)F(t)dt=\pi f(x)\quad(-1<x<1) \tag{10}$$

$$\int_{-1}^{1}F(t)dt=0 \tag{11}$$

где

$$K(x,t)=\frac{c_0}{t+x+2}+c_1(1+x)\frac{d}{dx}(t+x+2)^{-1}+c_2(1+x)^2\frac{d^2}{dx^2}(t+x+2)^{-1}$$

$$c_0=\frac{1}{2}\left[1-\frac{m(1+k_1)}{m+k_2}-\frac{3(1-m)}{1+mk_1}\right],\quad c_1=-\frac{6(1-m)}{1+mk_1},\quad c_2=-\frac{2(1-m)}{1+mk_1}$$

$$m=\frac{\mu_1}{\mu_2},\quad k_i=3-4\nu_i\ (i=1,2)\quad \text{(плоская деформация)}$$

μ_i, ν_i - модули сдвига и коэффициенты Пуассона составляющих полуплоскостей.

Для второй задачи имеем только уравнение (10), а в выражении для $K(x,t)$ следует положить $c_0=-1$, $c_1=-6$, $c_2=-2$

Функция $F(t)$ представляется в виде

$$F(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}g(t)\qquad(|t|<1) \tag{12}$$

где $\alpha=-0.5$, а β определяется из трансцендентного уравнения

$$2d_1\cos\pi(\beta+1)-d_2(\beta+1)^2-d_3=0$$

$$d_1=(m+k_2)(1+mk_1),\quad d_2=-4(m+k_2)(1-m)$$

$$d_3=(1-m)(m+k_2)+(1+mk_1)(m+k_2)-m(1+k_1)(1+mk_1)$$

Во второй задаче $\alpha=-0.5$, $\beta=0$.

Подставляя (12) в уравнения (10), (11) и заменяя интегралы квадратурными суммами согласно формулам (6) и (8), будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i g(\xi_i)\left[\frac{[1-q_i(x)]}{\xi_i - x} + R(\xi_i, x)\right] = \pi f(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i g(\xi_i) = 0 \tag{13}$$

где

$$R(\xi_i, x) = c_0 \frac{[1-q_i(-x-2)]}{\xi_i + x + 2} + c_1(1+x)\frac{d}{dx}\left(\frac{[1-q_i(-x-2)]}{\xi_i + x + 2}\right) +$$

$$+ c_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{[1-q_i(-x-2)]}{\xi_i + x + 2}\right)$$

Для получения системы алгебраических уравнений относительно $g(\xi_i)$ необходимо функциональное уравнение (13) приравнять в $(n$-1) точках, выбор которых в разумных пределах произволен. Обычно точки для приравнивания выбираются так, чтобы максимально упростить левую часть уравнения, например, можно было бы найти такие x_k, $(k=1,n-1)$, при которых или $q_i(x_k)=0$ или $q_i(-x_k-2)=0$. Однако, как нетрудно заметить, ни один из последних случаев не упрощает левую часть (13) настолько, чтоб оправдать те дополнительные вычислительные трудности, которые связаны с определением корней функций $q_i(x)$, не являющихся многочленами. Численный эксперимент показал, что наиболее предпочтительным в смысле скорости сходимости является выбор корней многочлена Чебышева первого рода $T_{n-1}(x)$.

В силу вышесказанного, примем x_k $\{k=1,n-1$ корнями $T_{n-1}(x)$, т.е.

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2(n-1)} \qquad (k=1,n-1)$$

Тогда из (13) получим систему алгебраических уравнений относительно $g(\xi_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i g(\xi_i)\left[\frac{[1-q_i(x_k)]}{\xi_i - x_k} + R(\xi_i, x_k)\right] = \pi f(x_k)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i g(\xi_i) = 0 \tag{14}$$

Во второй задаче будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} w_i g(\xi_i)\left[\frac{[1-q_i(y_k)]}{\xi_i - y_k} + R(\xi_i, y_k)\right] = \pi f(y_k) \qquad (k=1,2,...,n) \tag{15}$$

где y_k $(k=1,2,...,n)$ являются корнями многочлена $T_n(x)$.

Ввиду отсутствия в уравнении (10) фредгольмовского ядра можно утверждать, что последние системы дают точное решение уравнения (10).

если неизвестная функция $g(t)$ является многочленом порядка (n-1) и ниже.

В работе [1] уравнения (10), (11) сведены к системе алгебраических уравнений на основе квадратурной формулы [1,(7.198)], совпадающей с (9).

$$\int_{-1}^{1} F(x,t)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i F(\xi_i,t) \qquad \mathrm{Re}\alpha,\mathrm{Re}\beta > -1 \tag{16}$$

которая формально принята верной и для сингулярных интегралов, входящих в уравнение (10). Однако формулу (16) можно использовать только в случае, когда функция $F(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера и по x и по t.

Следуя работе [1], положим

$$f(x) = -\frac{1+k_1}{2\mu_1}\,p_0.$$

Для коэффициентов интенсивности напряжений имеем [1, (7.218)]

$$k(b) = -\frac{2\mu_1}{1+k_1}\,2^{0.5+\beta}\,a_0^{0.5}\,g(1)$$

$$k(a) = \mu^* a_0^{-\beta} g(-1)\ ; \ \ \mu^* = \mu_1 m\frac{(3+2\beta)(1+mk_1)-(1+2\beta)(m+k_2)}{(m+k_2)(1+mk_1)\sin\pi(1+\beta)} \tag{17}$$

Результаты расчетов системы (14) представим в виде табл. 1 подобно таблице VIII работы [1], которую для сравнения повторим и здесь.

Табл. VIII в работе [1] приведена с целью показать влияние числа N точек квадратурной формулы на сходимость результатов. Табл. 1 преследует ту же цель.

Таблица VIII

$p(x)=p_0$	$\mu_2/\mu_1 = 23.08$	
N	$\dfrac{k(b)}{p_0(a_0)^{\frac{1}{2}}}$	$\dfrac{k(a)}{p_0(a_0)^{\frac{1}{2}}}$
20	0.883063837	2.63008398
40	0.882810532	2.62481953
48	0.882759563	2.62447473
60	0.882716454	2.62417608
98	0.882649609	2.62365727

Таблица 1

$p(x)=p_0$	$\mu_2/\mu_1 = 23.08$	
n	$\dfrac{k(b)}{p_0(a_0)^{\frac{1}{2}}}$	$\dfrac{k(a)}{p_0(a_0)^{\beta}}$
4	0.882437588	2.871765485
5	0.882529418	2.828266342
8	0.882541313	2.800958604
13	0.882542763	2.799114267
20	0.882542649	2.800435367

Сравнение значений N и n, приведенных в таблицах, показывают неоспоримое преимущество квадратурных формул (6) и (8) и нецелесообразность использования формулы (16) для сингулярных интегралов. Кроме того, следует отметить, что в настоящей работе значения $g(\pm 1)$ определяются по интерполяционной формуле (5), в то время как в работе [1], по утверждению авторов, более стабильные результаты для указанных величин получены при игнорировании значений в крайних точках (т.е. $g(t_1)$ и $g(t_N)$) и использовании формулы квадратичной экстраполяции, основанной на предыдущих трех значениях $g(t_k)$ (т.е. $k = 2, 3, 4$ и $k = N-3, N-2, N-1$).

Результаты расчетов системы (15) приведем в табл. 2, где в первом столбце приведены значения порядка интерполяции, во втором – соответствующие им приближенные значения коэффициента концентрации напряжений на внутреннем конце трещины, а в третьем – точное численное значение, вычисленное по аналитической формуле, полученной в работе [6].

Таблица 2.

n	Вычисленное значение	Точное значение
4	1.12181883	1.12152225
6	1.12144926	1.12152225
9	1.12151354	1.12152225
12	1.12152149	1.12152225
16	1.12152235	1.12152225

ЛИТЕРАТУРА

1. Erdogan F., Gupta G.D. and Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. Mechanics of Fracture. G.C.Sih ed. V.1, Noordoff, Leyden, 1973, p. 368-425.
2. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения.-ПММ, т. 46, вып. 3, 1982, с. 494-501.
3. Саакян А.В. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом, встречающихся в смешанных задачах теории упругости.-Докл. НАН РА, 1997, № 4.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1.- М.: Наука, 1976.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. СМБ. Т. 2.- М.: Наука, 1966. 296 с.
6. Койтер В.Т. Обсуждение статьи Бови "Растяжение прямоугольной пластины с симметричными трещинами на кромках" – Тр. Амер. О-ва инженеров-механиков, сер. Е, Прикладная механика, 1965, № 1, с. 279-280.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
7.12.1999