ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №3, 2000** Механика

УДК 539.3

К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Гюльзадян Э.Э.

Է.Է. Գյուլզադյան
Առաձգական հիմքի վրա գտնվող անիզոտրոպ թաղանթների օպտիմալ նախագծման խնդիր

Դիտարկված է առաձգական հիմքի վրա գտնվող անիզոտրոպ թաղանթի օպտիմալ նախագծման խնդիր: Գտնված են առաձգական հիմքի տարբեր մոդելների համար թաղանթի հաստության բաշխումները, որոնք հնարավորին չափ մեծացնում են թաղանթի տատանումների հիմնական հաճախությունը տրված ծավալի դեպքում:

E.E. Gyulzadyan
One problem of optimal design of anisotropic shells on elastic base

Рассмотрена задача оптимального проектирования оболочки, расположенной на упругом основании. Найдены распределения толщины оболочки при различных моделях основания, придающих максимум первой собственной частоте колебаний, при заданном весе.

Рассмотрим задачу колебаний оболочки двоякой кривизны и переменной толщины, расположенную на упругом основании. Предположим, что оболочка изготовлена из анизотропного материала, и в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности. Уравнения колебаний относительно амплитудных функций U,V и W, характеризующих перемещения точек срединной поверхности оболочки по направлениям α,β и Z, запишутся в форме [1,2]

$$T_{1,\alpha}+S_{12,\beta}=-\rho h\omega^2 U,\quad S_{12,\alpha}+T_{2,\beta}=-\rho h\omega^2 V \tag{1}$$

$$T_1/R_1+T_2/R_2+M_{1,\alpha\alpha}+2M_{12,\alpha\beta}+M_{2,\beta\beta}=\rho h\omega^2 W-kW-t(W_{,\alpha\alpha}+W_{,\beta\beta})$$

Граничные условия шарнирно опертого, свободного в тангенциальном направлении края будут

$$V=0,\, W=0, T_1=0, M_1=0 \quad \text{при} \quad \alpha=0,a \text{ , и} \tag{2}$$

$$U=0,\, W=0, T_2=0, M_2=0 \quad \text{при} \quad \beta=0,b$$

где введены следующие обозначения:

$$T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2+C_{16}\varepsilon_{12};\; T_2=C_{12}\varepsilon_1+C_{22}\varepsilon_2+C_{26}\varepsilon_{12}$$

$$S_{12}=C_{16}\varepsilon_1+C_{26}\varepsilon_2+C_{66}\varepsilon_{12};\; M_1=D_{11}\chi_1+D_{12}\chi_2+C_{16}\chi_{12}$$

$$M_2=D_{12}\chi_1+D_{22}\chi_2+C_{26}\chi_{12};\; M_{12}=D_{16}\chi_1+D_{26}\chi_2+D_{66}\chi_{12}$$

$$\varepsilon_1=U_{,\alpha}+W/R_1;\;\; \varepsilon_2=V_{,\beta}+W/R_1;\; \varepsilon_{12}=U_{,\beta}+V_{,\alpha};\; \chi_1=-W_{,\alpha\alpha}$$

$$\chi_2=-W_{,\beta\beta};\; \chi_{12}=-2W_{,\alpha\beta};\; C_{ij}=hB_{ij};\; D_{ij}=h^3B_{ij}/12, \qquad (i,j=1,2,6)$$

ρ и B_{ij} -плотность и коэффициенты упругости материала оболочки; R_1 и

R_2 — радиусы кривизны оболочки; a и — размеры оболочки; k и t — обобщенные упругие характеристики упругого основания.

На толщину $h(\alpha,\beta)$ наложено ограничение в форме неравенства

$$0 < h_{\min} \le h \le h_{\max} \qquad (3)$$

Задачу максимизации первой собственной частоты колебаний при заданном весе можно поставить так.

Среди функций $h(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих ограничениям (3), найти такую, которая сообщала бы минимум функционалу $J(h) = -\Pi$, при условии, что выполняются равенства

$$\mathrm{T} - 1 = 0 \quad \overline{\mathrm{V}} - \mathrm{V}_* = 0 \qquad (4)$$

где амплитудные значения потенциальной энергии П и кинетической энергии К, а также объем оболочки $\overline{\mathrm{V}}$ выражаются следующими соотношениями:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_\Omega [T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + T_{12}\varepsilon_{12} + M_1\chi_1 + M_2\chi_2 +$$

$$+ 2M_{12}\chi_{12} + kw^2 + t((w_{,\alpha})^2 + (w_{,\beta})^2)]d\alpha d\beta$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\iint_\Omega \rho h(U^2 + V^2 + W^2) d\alpha d\beta, \qquad \overline{\mathrm{V}} = \iint_\Omega h\, d\alpha d\beta.$$

Введем неопределенные множители Лагранжа $\lambda_{\mathrm{T}} = \mathrm{const}$ и $\lambda_{\mathrm{V}} = \mathrm{const}$ и построим вспомогательный функционал

$$P = J + \lambda_{\mathrm{T}}(\mathrm{T} - 1) + \lambda_{\mathrm{V}}(\overline{\mathrm{V}} - \mathrm{V}_*)$$

Приравнивая нулю первую вариацию P, получаем необходимые условия оптимальности, из которых первые три совпадают с уравнениями (1), если принять $\lambda_{\mathrm{T}} = -\omega^2$, а четвертое будет

$$L(U,V,W,h) + 2\lambda_{\mathrm{V}} = 0 \qquad (5)$$

где

$$L(U,V,W,h) = B_{11}\varepsilon_1^2 + 2B_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + B_{22}\varepsilon_2^2 + B_{66}\varepsilon_{12}^2 + B_{16}\varepsilon_1\varepsilon_{12} +$$

$$+ B_{26}\varepsilon_2\varepsilon_{12} + \frac{h^2}{4}\Big[B_{11}\left(W_{,\alpha\alpha}\right)^2 + 2B_{12}W_{,\alpha\alpha}W_{,\beta\beta} + B_{22}\left(W_{,\beta\beta}\right)^2 +$$

$$+ 4B_{66}\left(W_{,\alpha\beta}\right)^2 + 4B_{16}W_{,\alpha\beta}W_{,\alpha\alpha} + 4B_{26}W_{,\alpha\beta}W_{,\beta\beta}\Big] + \lambda_{\mathrm{T}}\rho(U^2 + V^2 + W^2)$$

Система уравнений (1)-(2), (4) и (5), составляет полную систему для нахождения искомых величин. Она является сильно нелинейной системой интегро-дифференциальных уравнений, нелинейность которой обусловлена кубической зависимостью жесткости от толщины. Это обстоятельство исключает возможность ее решения в аналитической форме. Поэтому поиск решения должен основываться на численных методах.

Для ее решения воспользуемся алгоритмом градиентного метода первого порядка[4] и методом конечных элементов (МКЭ) [5] для вычислений собственных форм и частот. В соответствии с МКЭ, область оболочки дискретизируется разбивкой на элементы с неизвестными узловыми значениями искомых функций U, V, W и h и первых производных W. Таким образом, для всего элемента должны быть заданы 12 перемещений и 8 углов поворота. Эти 20 величин будем называть обобщенными перемещениями. Пронумеровав их в определенном порядке, каждое обобщенное перемещение можем считать компонентой двадцатимерного вектора перемещений $[q]$.

$$[q]_r^T = [q_0, q_2, \ldots, q_{19}]_r$$

где T означает транспонированный вектор.

Потенциальная энергия отдельного элемента будет $P_k = [q]_r^T K_r [q]_r$, где матрица жесткости

$$K_r = \iint_{\Omega_r} B_r^T E_r B_r \, d\Omega + k \iint_{\Omega_r} [H]^T [H] d\Omega + t \iint_{\Omega_r} [H]_\alpha{}^T [H]_\alpha + t \iint_{\Omega_r} [H]_\beta{}^T [H]_\beta$$

E_r – прямоугольная матрица, зависящая от упругих постоянных и координат точек элемента

$$E_r = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ C_{61} & C_{62} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix},$$

а B_r – 6×20-мерная матрица, с помощью которой связаны деформации и перемещения

$$[\varepsilon]_r = [B]_r [q]_r$$

Ненулевые элементы $b_{ij}(\alpha, \beta)$ матрицы B_r выражаются через функции формы $N_i(\alpha, \beta)$ $(i = 0,..3)$ и $H_i(\alpha, \beta)$ $(i = 0,..11)$.

$$b_{0j} = N_{j,\alpha}(j = 0..3); \; b_{0j} = H_{j-8} / R_1(j = 8..19),$$

$$b_{1j} = N_{j-4,\alpha}(j = 4..7); b_{1j} = H_{j-8} / R_2(j = 8..19),$$

$$b_{2j} = N_{j,\beta}(j = 0..3); \; b_{2j} = N_{j-4,\alpha}(j = 4..7);$$

$$b_{3j} = -H_{j-8,\alpha\alpha}; b_{4j} = -H_{j-8,\beta\beta}; b_{5j} = -2H_{j-8,\alpha\beta}; (j = 8..19)$$

$$H_s = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (\xi\xi_s + 1)(\eta\eta_s + 1)(2 + \xi\xi_s + \eta\eta_s - \xi^2 - \eta^2) \\ -b_r \eta_s (\xi\xi_s + 1)(\eta\eta_s + 1)^2 (\eta\eta_s - 1) \\ a_r \xi_s (\xi\xi_s + 1)^2 (\xi\xi_s - 1)(\eta\eta_s + 1) \end{bmatrix}$$

$$N_s = \frac{1}{4}(\xi\xi_s + 1)(\eta\eta_s + 1), \; (s = 0,..,3)$$

$$[\mathrm{H}] = [\mathrm{H}_i], \; [\mathrm{H}]_\alpha = [H_{i,\alpha}], \; [\mathrm{H}]_\beta = [H_{i,\beta}] \; (i = 0..11)$$

$$[\xi_s, \eta_s] = \{(-1,1), (1,1), (-1,-1), (1,-1)\}; \; \xi = (2\alpha - 2\alpha_1 - a_r)/a_r; \; \eta = -(2\beta - 2\beta_1 - b_r)/b_r;$$

Здесь через запятую $f_{,\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}, \ldots$ обозначены частные производные по переменным, a_r, b_r – длина и ширина конечного элемента, α_1, β_1 – координаты центра элемента в глобальной системе координат.

Уравнение колебаний оболочки заданной толщины записывается в виде задачи на собственные значения

$$K \cdot Q = \omega^2 \cdot Q$$

где K — глобальная матрица жесткости, получаемая специальным суммированием матриц жесткости отдельных элементов, M - глобальная матрица масс, Q-вектор обобщенных перемещений, состоящий из искомых значений функций U,V и W и производных W в узлах.

Найденные перемещения и собственная частота колебаний подставляются в соотношение, полученное из условия постоянства объема и определяющее неопределенный множитель Лагранжа

$$\lambda_V = \frac{1}{2\Omega}\left(\frac{V_* - V_{h_i}}{\gamma} - \iint_\Omega L(U,V,W,h)\,d\alpha d\beta\right)$$

Здесь $V_{h_i} = \iint_\Omega h_i(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta$ -текущий объем оболочки на i-ой итерации.

Полученное значение подставляется в формулу для приращения толщины

$$\delta h = \gamma(\,L(U,V,W,h) + 2\lambda_V\,)$$

где γ — шаг по градиенту.

После этого вычисляется следующее выражение для толщины:

$$h_{i+1}(\alpha,\beta) = h_i(\alpha,\beta) + \delta h(\alpha,\beta)$$

Вычисление продолжается до тех пор пока не будет выполнено условие

$$|\delta h(\alpha,\beta)| < \varepsilon$$

где ε - малая заданная величина.

На графиках изображены оптимальные распределения толщин при

1) двухпараметрической модели основания (фиг.1)

2) однопараметрической модели основания (основание Винклера) (фиг.2)

3) оболочке без основания (фиг.3)

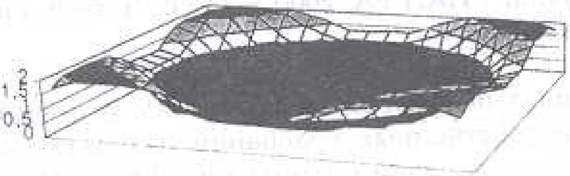
Изображенная оболочка характеризуется следующими параметрами: $a = b = 50$ см, $R_1 = R_2 = 100$ см, $B_{11} = 238530$ кг/см², $B_{12} = 81363$ кг/см², $B_{16} = -51241$ кг/см², $B_{22} = 178629$ кг/см², $B_{26} = -63501$ кг/см², $B_{66} = 92825$ кг/см², $k = 10$ кг/см³, $t = 1000$ кг/см, $h_{min} = 0.5$ см, $h_{max} = 2$ см.

Как видно из графиков, материал оболочки распределяется так, чтобы в углах выполнялось равенство $h = h_{max}$, а в середине $h = h_{min}$. Увеличение значения коэффициента основания или учет реакции основания при помощи двух параметров приводит к увеличению зоны, где $h = h_{max}$ и к увеличению толщины на серединах сторон.

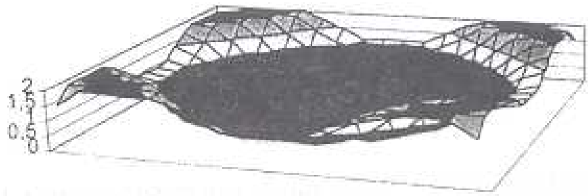
Получены следующие значения оптимальной частоты:

	$\omega_{опт}$	ω_*
1)	149.63	113.3
2)	128.9	99.27
3)	95.04	78

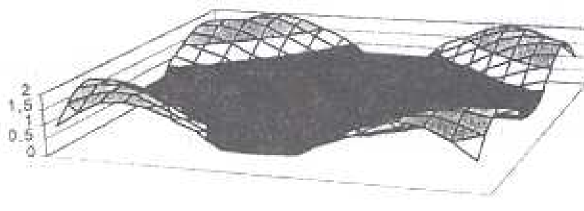
Здесь ω_* - частота собственных колебаний, соответствующая оболочке постоянной толщины $h = 1$ см.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек-М.: Физматгиз, 1961. 384с.
2. Власов В.З, Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании-М.: Физматгиз, 1960. 492с.
3. ТроицкийВ.А, Петухов Л.В. Оптимизация формы упругих тел-М. Наука, 1982. 432с.
4. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел-М.: Наука, 1980. 246с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике-М.: Наука, 1975.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 21.02.2000