ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53 №3, 2000** Механика
УДК 539.3

ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ КЛИНА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Аванян В.Т., Аванян Н.В., Баблоян А.А.

Վ.Տ. Ավանյան, Ն.Վ. Ավանյան, Ա.Հ. Բաբլոյան

Լարվածային վիճակի բնույթը երկու տարբեր անիզոտրոպ նյութերից պատրաստված սեպի գագաթի փոքր շրջակայքում

Աշխատանքում ստացված է երկու տարբեր անիզոտրոպ նյութերից բաղկացած սեպի գագաթի փոքր շրջակայքում լարումների վարքը բնորոշող տրանսցենդենտ հավասարումը, երբ բաղադրյալ սեպի եզրերին տրված են լարումների բաղադրիչները: Մշակված ալգորիթմների և նրանց համապատասխան ծրագրերի օգնությամբ ստացված են տրանսցենդենտ հավասարման առաջին մի շարք արմատները՝ պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում: Սահմանային անցումով ստացվել են նաև բաղադրյալ անիզոտրոպ շերտի առաջին եզրային խնդրի տրանսցենդենտ հավասարման արմատները:

V.T. Avanian, N.V. Avanian, A.H. Babloian

Character of the stresses in a small neighbourhood of a wedge of two various anisotropic materials

В работе получено трансцендентное уравнение первой основной задачи для прямолинейно анизотропного составного клина из двух различных материалов, с произвольными направлениями главных осей анизотропий. Для ряда значений параметров задачи вычислено несколько первых корней. Путем машинного предельного перехода отсюда получены также значения нескольких первых корней трансцендентного уравнения первой основной задачи составной анизотропной полосы.

В работе исследуется поведение напряжений в малой окрестности вершины составного клина, изготовленного из двух (или симметрично собранных трех) прямолинейно анизотропных материалов. Аналогичные вопросы для изотропных материалов исследовались в работах [1]. Для анизотропных материалов трансцендентные уравнения были получены также в [2,3].

Как известно [4], уравнения равновесия плоской задачи теории упругости для трансверсально-изотропных материалов, когда координатные оси XOZ совпадают с главными осями анизотропии, имеют вид

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}=0$$

$$\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

Решение (1) в полярной системе координат (r,φ)

$$x=r\cos\varphi=\rho\cos\theta\ ,\ z=r\sin\varphi=\alpha^{-1}\rho\sin\theta \qquad (2)$$

можно представить в виде [5,6]:

$$u_x(r,\varphi)=\gamma_0(\alpha)\lambda^{-1}\Phi'(\lambda,\theta)\rho^{-\lambda}, \quad u_z(r,\varphi)=\Phi(\lambda,\theta)\rho^{-\lambda}$$
$$\Phi''(\lambda,\theta)+\lambda^2\Phi(\lambda,\theta)=0 \tag{3}$$

где λ – произвольный комплексный параметр, α – корень многочлена четвертого порядка

$$\rho=rb(\varphi),\ tg\,\theta=\alpha\cdot tg\,\varphi,\ b^2(\varphi)=\cos^2\varphi+\alpha^2\sin^2\varphi=(\cos^2\theta+\alpha^{-2}\sin^2\theta)^{-1}$$
$$\gamma_0(\alpha)=\alpha(c_{13}+c_{44})(c_{11}-\alpha^2c_{44})^{-1}=\alpha^{-1}(c_{13}+c_{44})^{-1}(\alpha^2c_{33}-c_{44}) \tag{4}$$
$$\gamma_3(\alpha)=c_{44}[\alpha\gamma(\alpha)+1]=c_{11}\alpha^{-1}\gamma(\alpha)-c_{13}=c_{33}\alpha^2-c_{13}\alpha\gamma(\alpha)=c_{44}\gamma_2(\alpha)$$

Пользуясь формулами поворота осей для компонентов перемещений и напряжений из (3) получим:

$$u_r(r,\varphi)=\sum_{p=1}^{2}\left[\gamma(\alpha_p)\lambda^{-1}\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\cos\varphi+\Phi_p(\lambda,\theta_p)\sin\varphi\right]b_p^{-\lambda}(\varphi)r^{-\lambda}$$

$$u_\varphi(r,\varphi)=\sum_{p=1}^{2}\left[\Phi_p(\lambda,\theta_p)\cos\varphi-\gamma_0(\alpha_p)\lambda^{-1}\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\sin\varphi\right]b_p^{-\lambda}(\varphi)r^{-\lambda}$$

$$\sigma_\varphi=\sum_{p=1}^{2}\frac{\gamma_3(\alpha_p)}{\alpha_p}\left[\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\cos\theta_p+\lambda\Phi_p(\lambda,\theta_p)\sin\theta_p\right]b_p^{-\lambda+1}(\varphi)r^{-\lambda-1} \tag{5}$$

$$\tau_{r\varphi}=\sum_{p=1}^{2}\gamma_3(\alpha_p)\left[\alpha_p^{-2}\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\sin\theta_p-\lambda\Phi_p(\lambda,\theta_p)\cos\theta_p\right]b_p^{-\lambda+1}(\varphi)r^{-\lambda-1}$$

$$\sigma_r+\sigma_\varphi=\sum_{p=1}^{2}\alpha_p^{-1}\gamma_3(\alpha_p)(\alpha_p^2-1)\left[\lambda\Phi_p(\lambda,\theta_p)\sin\theta_p-\Phi'_p(\lambda,\theta_p)\cos\theta_p\right]\times$$
$$\times\, b_p^{-\lambda-1}(\varphi)r^{-\lambda-1}$$

Пусть клин состоит из двух прямолинейно анизотропных материалов с модулями упругости c_{ij1} и c_{ij2}, соответственно. Граничные лучи первого материала составляют углы φ_{11} и φ_{12} с главным направлением анизотропии OX_1, а граничные лучи второго материала составляют с его главным направлением OX_2 углы φ_{21} и φ_{22}. При этом условия полного сцепления двух различных материалов будут :

$$\tau_{r\varphi1}(r,\varphi_{12})=\tau_{r\varphi2}(r,\varphi_{21}),\qquad \sigma_{\varphi1}(r,\varphi_{12})=\sigma_{\varphi2}(r,\varphi_{21})$$
$$u_{\varphi1}(r,\varphi_{12})=u_{\varphi2}(r,\varphi_{21}),\qquad u_{r1}(r,\varphi_{12})=u_{r2}(r,\varphi_{21}) \tag{6}$$

Сначала будем считать, что граничные условия для составного клина заданы в напряжениях:

$$\sigma_{\varphi k}(r,\varphi_{kk})=0,\quad \tau_{r\varphi k}(r,\varphi_{kk})=0,\quad (k=1,2) \tag{7}$$

В формулах (5) при всех величинах добавим дополнительный индекс $(q,\ q=1,2)$, указывающий номер материала и представим решение уравнения (2) в виде:

$$\Phi_{pk}(\lambda,\varphi)=A_{pk}(\lambda)\sin\lambda(\theta_{pk}-\theta_{pkq})+B_{pk}(\lambda)\cos\lambda(\theta_{pk}-\theta_{pkq})$$

$$\left(p,k,q=1,2,k+q=3\right) \tag{8}$$

Если на границе составного клина $\varphi=\varphi_{11}=0$ задаются условия симметрии (кососимметрии), то граничные условия (7), $(k=1)$ необходимо заменить следующими:

$$A_{p1}(\lambda)\sin\lambda\psi_{p1}+B_{p1}(\lambda)\cos\lambda\psi_{p1}=0\ \ (p=1,2) \tag{9}$$

$$\left(\ A_{p1}(\lambda)\cos\lambda\psi_{p1}-B_{p1}(\lambda)\sin\lambda\psi_{p1}=0\ \ (p=1,2)\ \right)$$

$$\Psi_{pk}=(-1)^{k-1}\theta_{pk0},\theta_{pk0}=\theta_{pk2}-\theta_{pk1},tg\theta_{pkq}=\alpha_{pk}\,tg\varphi_q,\varphi_{k0}=\varphi_{k2}-\varphi_{k1}$$

Если же условия симметрии (кососимметрии) задаются на полупрямой $\varphi=\varphi_{22}=\pi/2$, то граничные условия (7), $(k=2)$ заменяются следующими:

$$A_{p2}(\lambda)\cos\lambda\psi_{p2}-B_{p2}(\lambda)\sin\lambda\psi_{p2}=0\ \ (p=1,2) \tag{10}$$

$$\left(A_{p2}(\lambda)\sin\lambda\psi_{p1}+B_{p2}(\lambda)\cos\lambda\psi_{p1}=0\ ,\ \ (p=1,2)\right)$$

В случае контакта двух различных анизотропных материалов при кулоновском трении последнее условие (6) заменим:

$$\tau_{r\varphi k}\left(r,\varphi_{kq}\right)=\kappa\,\sigma_{\varphi k}\left(r,\varphi_{kq}\right),\ \ (k=1,2\ ;\ k+q=3)$$

Сначала рассмотрим первую основную задачу для составного анизотропного клина.

Удовлетворяя граничным условиям (7) и условиям полного контакта (6), в силу (8), для определения неизвестных постоянных A_{pk} и B_{pk} $(p\ ,\ k=1,2)$ получим систему из восьми линейных однородных уравнений. Для получения нетривиального решения приравниваем к нулю его детерминант: $D(\lambda)=0$. Функция $D(\lambda)$ представляется в виде детерминанта восьмого порядка, элементы которого легко определяются из соотношений (5)-(7). Нет необходимости привести этот детерминант к стандартному виду [1-3], так как разработаны алгоритмы для определения несколько первых (действительных и комплексных) корней детерминанта с необходимой точностью. Эти алгоритмы и соответствующие машинные программы основаны на использовании: а) графика $D(\lambda)$, б) графиков действительной и мнимой частей $D(\lambda)$, в) принципа аргумента (теорема Руше).

При расчетах исследованы следующие вопросы.

1. Особенности напряжений для анизотропной составной полуплоскости.

Вычислены первые несколько корней трансцендентного уравнения первой основной задачи теории упругости для составной полуплоскости, составленной из двух различных прямолинейно анизотропных клиновидных материалов, при различных направлениях линии контакта материалов:

I материал

$c_{11}=15.94\cdot10^{10}$, $c_{13}=7.385\cdot10^{10}$, $c_{33}=12.61\cdot10^{10}$, $c_{44}=3.89\cdot10^{10}$

II материал (11)

$c_{11}=1.954\cdot10^{11}$, $c_{12}=7.385\cdot10^{10}$, $c_{33}=1.261\cdot10^{11}$, $c_{44}=3.89\cdot10^{10}$ (Паскаль)

Результаты вычислений, когда главные направления анизотропии материалов определяются соотношениями $\varphi_{11} = 15^\circ$, $\varphi_{21} = 0^\circ$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

φ^0 λ	φ_{10}=20 φ_{20}=160	φ_{10}=40 φ_{20}=140	φ_{10}=60 φ_{20}=120	φ_{10}=80 φ_{20}=100	φ_{10}=100 φ_{20}=80	φ_{10}=120 φ_{20}=60	φ_{10}=140 φ_{20}=40	φ_{10}=160 φ_{20}=20
λ_1	0.7845	0.8440	1	1	1	1	1	1
λ_2	1	1	1.0668	1.1645+ 0.1681 i	1.1116	1.1040	1.2266	1.1725
λ_3	1.8824	1.8569	1.2556	2.5880	1.4817	1.8602	1.8576	1.9882
λ_4	2.0339	2.1098	2.3697- 0.1868 i	2.7198	2.9650	3.0455	1.9234	2.1853
λ_5	2.9558	3.3127	3.7330- 0.2066 i	4.0640	4.3510+ 0.2610 i	3.6013+ 0.6126 i	3.1271+ 0.2518 i	2.9781
λ_6	3.4009	4.2777	4.2718+ 1.3026 i	5.411+ 0.1968 i	6.6453+ 0.6160 i	5.2574+ 0.7841 i	4.3859+ 0.4337 i	2.8070
λ_7	3.9838	5.7320	5.2676	7.2996+ 0.4969 i	8.1738+ 1.3433 i	5.6447+ 1.2831 i	5.7138+ 0.6662 i	3.9023+ 0.1341 i
λ_8	4.9509	5.8511	5.6164	9.1734+ 0.3135 i	8.4904	6.7023+ 1.0433 i	7.0099+ 0.8002 i	5.0024+ 0.2456 i
λ_9	5.2398	7.2015+ 0.1772 i	6.6585+ 0.3808 i	10.175+ 1.1685 i	9.8040+ 0.5513 i			6.1242+ 0.3100 i
λ_{10}	5.9569	8.1888	7.5123+ 1.3305 i		12.260+ 0.7397 i			7.2559+ 0.3628 i

В табл. 2 приведены корни трансцендентного уравнения этой задачи (для материалов (11)), когда растворы составляющих клиньев $\varphi_{10} = 40^\circ$, $\varphi_{20} = 140^\circ$, $\varphi_{21} = 0^\circ$, а направление анизтропии первого материала φ_{11} принимает значения от -15° до 120°, с шагом 15°. Как видно из табл. 2, путем поворота направлений анизотропии можно из малонапряженного состояния переходить к концентрации напряжений и, наоборот. Для данного случая точками переходов являются $\varphi_{11} \approx 85.7^\circ$ и $\varphi_{11} \approx 133.2^\circ$.

Таблица 2

φ_{11} λ	-15^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0	105^0	145^0
λ_1	0.9035	0.8404	0.8479	0.8852	0.9383	0.9848	1	1	0.9986
λ_2	1	1	1	1	1	1	1.0091	1.0108	1
λ_3	1.9045	1.8464	1.8570	1.8998	1.4578	2.0044	2.0134	1.9981	1.9775
λ_4	1.7904+ 0.5808 i	1.8266+ 0.133 i	2.2354+ 0.4708 i	2.1999	2.1167	2.0737	2.0620	2.0630	2.0869
λ_5	1.2695+ 0.5310 i	2.2368+ 0.4735 i	2.7307+ 0.4614 i	2.5362	2.6916	2.7804	2.7612	2.6723	2.5974

2. Особенности напряжений в конце тонкостенной анизотропной накладки: Вычислим теперь корни трансцендентного уравнения первой основной задачи для составной полуплоскости, когда угол раствора первого материала (φ_{10}) стремится к нулю так, что произведение

$\varphi_{10} \cdot c_{11,1} = C$ (C - жесткость полубесконечной накладки) остается постоянным. При предельном переходе отношение упругих постоянных первого материала остается неизменным. В табл. 3 приведены значения первых трех корней трансцендентного уравнения в зависимости от направлений анизотропий накладки (φ_{11}) и полуплоскости (φ_{21}), когда центральный угол накладки $\varphi_{10} = 0.001^{\circ}$, $\varphi_{10} + \varphi_{20} = \pi$, $C = 1$.

Таблица 3

φ_{11}°	φ_{21}°	λ_1	λ_2	λ_3	φ_{11}°	φ_{21}°	λ_1	λ_2	λ_3
105	45	0.86116	1.76694	2.70907	30	150	0.86134	1.75816	2.61560
60	45	0.85194	1.75534	2.69829	105	0	0.82981	1.71781	2.65462
195	0	0.80420	1.68878	2.63003	60	0	0.81894	1.70510	2.64365
150	0	0.80320	1.68780	2.62915	15	60	0.85272	1.75616	2.74641
30	0	0.80420	1.68878	2.63003	15	30	0.82466	1.72101	2.65581

3. Особенности напряжений в конце полубесконечной вкладки: Рассмотрим первую основную задачу для составной полуплоскости, состоящей из трех, симметрично собранных анизотропных материалов (11). Считая, что вертикальная ось является осью симметрии, получено трансцендентное уравнение этой задачи.

В табл. 4 приведены значения первых девяти корней трансцендентного уравнения в зависимости от центральных углов $(\varphi_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{10} + \varphi_{20} = 0.5\pi)$ различных анизотропных материалов. Вычисления сделаны для следующих материалов:

I материал

$c_{11} = 15.94 \cdot 10^{10}$, $c_{13} = 7.385 \cdot 10^{10}$, $c_{33} = 12.61 \cdot 10^{10}$, $c_{44} = 3.89 \cdot 10^{10}$

II материал (12)

$c_{11} = 7.97 \cdot 10^{10}$, $c_{12} = 3.692 \cdot 10^{10}$, $c_{33} = 6.3 \cdot 10^{10}$, $c_{44} = 1.94 \cdot 10^{10}$ (Паскаль).

В табл. 4 приняты: $2\varphi_{10}$ — центральный угол вкладки (материал-1), $2\varphi_{20}$ — общий центральный угол основного материала, k_1 — коэффициент усиления центрального материала (вкладки), k_2 — коэффициент усиления основного материала. При расчетах направление анизотропии вкладки было выбрано $\varphi_{11} = 0^{\circ}$, а основного материала - $\varphi_{21} = 15^{\circ}$.

4. Составная анизотропная полоса. В трансцендентном уравнении $D(\lambda) = 0$ первой основной задачи для составного анизотропного клина вводим обозначения $\varphi_{20} = k\varphi_{10}$, $x = \lambda(\varphi_{20} + \varphi_{10})$, где $k = \mathrm{const}$, и переходим к пределу, когда $\varphi_{10} \to 0$. Так как функция $D(\lambda)$ имеет довольно громоздкий вид, то предельный переход осуществляется при помощи вычислительной машины.

Проверено, что процесс машинного предельного перехода устойчив. В пределе получаем корни трансцендентного уравнения первой основной задачи для составной анизотропной полосы, когда направления анизотропии каждого составляющего материала имеют произвольные ориентации. Отношение толщин составляющих материалов определяется коэффициентом $k\ (h_2 = k h_1)$. В табл. 5 приведены значения первых нескольких корней трансцендентного уравнения первой основной задачи теории упругости для анизотропной составной полосы, при различных отношениях толщин составляющих материалов $(k = 0.2\ ,\ 0.5\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 5)$. Табл. 5 составлена для пары материалов (12), когда главные направления анизотропии материалов определялись соотношениями $\varphi_{11} = 0°$, $\varphi_{21} = 15°$.

Таблица 4

λ_k	$\varphi_{10}=10^0$ $k_1=1, k_2=1$	$\varphi_{10}=1.5^0$ $k_1=10, k_2=1$	$\varphi_{10}=0.15^0$ $k_1=100, k_2=1$	$\varphi_{10}=0.0015^0$ $k_1=10000, k_2=1$	$\varphi_{10}=0.0015^0$ $k_1=10000, k_2=2$
Λ_1	0.725154	0.754122	0.753534	0.753464	0.726458
λ_2	1.96688+ 0.93375 i	1.91133+ 0.566473 i	1.88333+ 0.54382 i	1.88025+ 0.54126 i	1.98769+ 0.61936 i
λ_3	4.10664+ 1.21328 i	4.02743+ 1.00085 i	3.9675+ 0.98454 i	3.96336+ 0.98272 i	4.02131+ 0.99409 i
λ_4		6.18739+ 1.02813 i	6.09829+ 1.02254 i	6.08839+ 1.02193 i	6.12737+ 1.02131 i
λ_5		8.38362+ 0.65649 i	8.25948+ 0.69208 i	8.24552+ 0.69608 i	8.27646+ 0.68260 i
λ_6		9.54563	9.46612	9.45872	9.46351
λ_7		10.914	10.839	10.8288	10.8185
λ_8		11.9212+ 0.50676 i	11.7418+ 0.38394 i	13.9153+ 0.97085 i	11.7484+ 0.42387 i
λ_9		14.1375+ 1.00459i	13.9375+ 0.974146i	16.0622+ 1.02273i	16.0778+ 1.02542i

Таблица 5

k / x_k	0.2	0.5	1	2	5
x_1	4.47529 + 2.25287 i	4.12552 + 2.09340 i	3.7548 + 2.32836 i	3.62482 + 2.61693 i	3.91843 + 2.35608 i
x_2	7.89877 + 2.003031 i	10.6571 + 2.09661 i	7.4306 + 2.72579 i	7.0503 + 2.50828 i	6.98977 + 3.33829 i
x_3	9.68005	11.9044	10.743 + 3.16038 i	10.6239 + 2.68884 i	9.63836 + 3.415153 i
x_4	11.34215	16.0478	15.7496	19.5135 + 1.51016 i	12.901 + 3.02713 i
x_5			17.8432		16.2704 + 2.85191 i

В заключение отметим, что аналогичные вычисления как для составного анизотропного клина, так и для составной полосы можно проводить для любых других граничных условий и условий симметрии (кососимметрии).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобанян К.С. Напряжения в сотавных упругих телах.- Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1987. 338с.
2. Едоян В.Г. О напряженном состоянии в окрестности угловой точки контура с частично соединенным жестким телом в плоской задаче теории упругости для анизотропного тела.- ДАН Арм. ССР, 1980, т. 71, № 1, с. 22-27.
3. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела.- Докл. АН Арм. ССР. 1975, т. 61, № 4, с.219-224.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Механика связаных полей в элементах конструкций. т. 5. Электроупругость.-Киев: Наукова Думка, 1989. 239с.
5. Баблоян А.А., Аванян В.Т., Варданян Л.М. Характер напряженного состояния вблизи угловых точек анизотропных упругих тел.-Докл. НАН РА, 1999, т. 99, №3.
6. Баблоян А.А., Мелкумян С., Шахвердян Г.Н. Некоторые задачи квазипотенциала. ЕГУ, инст. Механики НАН РА. Вопросы оптимального управления устойчивости и прочности механических систем. Ереван, 1997, с. 201-204.

Ереванский архитектурно-
строительный институт

Поступила в редакцию
4.11.1999