ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №2, 2000 Механика
УДК 539.6

ПРОНИКАНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПЛОСКИМ СРЕЗОМ В ИДЕАЛЬНУЮ СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Асрян Н. Г.

Ն.Գ. Ասրյան

Հարթ կտրվածքով դեֆորմացվող գլանային մարմնի ներթափանցումը իդեալական սեղմելի հեղուկի մեջ

Դիտարկվում է իդեալական սեղմելի հեղուկի մեջ հարթ կտրվածքով դեֆորմացվող գլանային մարմնի ներթափանցման խնդիրը: Հաշվի առնելով մարմնի դեֆորմացվելը արտածվում են եզրային պայմանները, ընդ որում, հեղուկի մակերևույթի երկայնքով կտրվածքի եզրերի արագությունները միջձայնային են: Խնդիրը բերվում է ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը, որի արդյունքում ստացվում է արագությունների պոտենցիալի բաշխումը մարմնի վրա և հեղուկի մասնիկների նորմալ արագությունների բաշխումը մարմնից դուրս:

N.G. Asrian

Penetration of deformable cylindric body with plane cut in ideal compressible fluid

Рассматривается задача о проникании деформируемого цилиндрического тела с плоским срезом в идеальную жидкость. Выводятся граничные условия с учетом деформируемости тела, причем скорость краев среза вдоль поверхности жидкости дозвуковая. Задача решается методом интегральных уравнений, получаются распределения потенциала скоростей на теле и нормальных скоростей частиц жидкости вне тела.

Пусть цилиндрическое тело с плоским срезом проникает в сжимаемую жидкость, занимающую нижнюю полуплоскость. Ось x выбрана по поверхности жидкости, ось y — в глубь жидкости. В начальный момент времени $t=0$ плоский срез совпадает с частью поверхности жидкости $-l(0)<x<l(0)$, а при $t>0$ закон движения точек пересечения тела с поверхностью жидкости $x=\pm l(t)$, где $\dot{l}(t)<c$, причем c — скорость звука в жидкости.

Поскольку рассматриваемое тело тупое и скорость проникания мала, можно граничные условия на теле сносить на ось x.

Считая тело деформируемым, обозначая через ε толщину оболочки тела, ρ — плотность жидкости, ρ_0 — плотность материала тела, можно получить граничное условие на теле [1]

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+k\varphi=f(x,t), \;\; k=-\dfrac{\rho}{\rho_0\varepsilon}, \;\; x<l(t) \\ \varphi=0, \qquad x>l(t) \end{array}\right\} y=0 \tag{1}$$

где φ - потенциал скоростей жидкости, $f(x,t)$ — вертикальная скорость тела.

В самом деле, пусть $u_1(x,t)$ есть перемещение по оси y точек оболочки, уравнение движения которой $\varepsilon\rho_0\partial^2u_1/\partial t^2=-P$, где P есть давление жидкости. В силу интеграла Лагранжа для связи P с потенциалом перемещений Φ имеем $P = -\rho \partial^2 \Phi / \partial t^2$, причем условие равенства пермещений частиц жидкости и тела имеет вид $u_1 = u = \partial \Phi / \partial y$.

Подставляя эти соотношения в уравнение движения, получим

$$\varepsilon \rho_0 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^2 \partial y} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Интегрируя полученное соотношение от значения t в точке A пересечения тела с поверхности жидкости до t и учитывая, что в A, $\Phi = 0$, получим с учетом того, что $\varphi = \partial \Phi / \partial t$

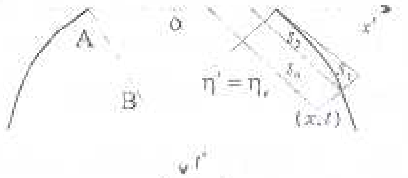
$$\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho \varphi = \varepsilon \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_A$$

При этом $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_A$ есть нормальная скорость тела, которая обозначается $\bar{f}(x)$, причем в точке A, $x = l(t)$ $\bar{f}(l(t)) = f(t)$.

Отсюда получится первое условие (1). Отметим, что первое условие (1) имеет место как на плоском срезе, так и на остальной смоченной поверхности тела, которое сносится на ось x.

Вообще говоря, в реальной задаче $f(x,t) = f(t)$, для общности и удобства рассмотрена произвольная функция $f(x,t)$, что не создает трудности в решении.

Условие (1) взято для полубесконечного тела, при этом условия для левой точки пересечения тела с жидкостью $x = -l(t)$ не выписаны, поскольку в рассматриваемый промежуток времени они не влияют на решение вблизи точки $x = -l(t)$, на фиг.1, это – область правее характеристики AB.



Фиг. 1

Уравнение для потенциала скоростей

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{2}$$

Обозначим $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, на поверхности $y = 0$

$$v(x,t) = v_+ + v_-, \quad \varphi(x,t) = \varphi_+ + \varphi_- \tag{3}$$

где выражения с индексом "+" равны нулю при $x < l(t)$, а с индексом "−" при $x > l(t)$.

Тогда условия (1) запишутся в виде

$$v_- + k\varphi_- = f(x,t), \quad \varphi_+ = 0 \tag{4}$$

Для связи потенциала $\varphi(x,t)$ при $y = 0$ со скоростью $v(x,t)$ имеет место [1,2,3]

$$\varphi(x,t)=-\frac{c}{\pi}\iint\frac{\nu(x',t')dx'dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2-(x-x')^2}} \tag{5}$$

Это равенство приведено в [2-4] в задаче о антиплоской трещине и задаче о крыле.

При этом, интегрирование в (5) ведется по сумме областей $s_0+s_1+s_2$ фиг.1. Причем, можно показать [2,3], что из условия $\varphi_+=0$ следует, что при определении $\varphi_-(x,t)$ интегралы по областям s_1 и s_2 сократятся. Тогда, вводя характеристические координаты

$\xi'=ct'-x'$, $\eta'=ct'+x'$, $\xi_0=ct-x$, $\eta_0=ct+x$

Можно показать, следуя [2], что решение φ_- будет

$$\varphi_-(\xi_0,\eta_0)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_a(\eta_0)}^{\xi_0}\frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0-\xi'}}\int\limits_{-\xi'}^{\eta_0}\frac{f_1(\xi',\eta')-k\varphi_-(\xi',\eta')}{\sqrt{\eta-\eta'}}d\eta' \tag{6}$$

где $f_1(\xi',\eta')=f(x',t')$, $\xi_a(\eta_0)=ct_3-l_2(t_3)$, $ct_3+l_2(t_3)=ct+x$.

Уравнение (6) представляет интегральное уравнение для определения $\varphi_-(\xi_0,\eta_0)$. В случае жесткого тела $k=0$ и (6) дает

$$\varphi_-^0(\xi_0,\eta_0)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_a(\eta_0)}^{\xi_0}\frac{d\xi'}{\sqrt{\xi_0-\xi'}}\int\limits_{-\xi'}^{\eta_0}\frac{f_1(\xi',\eta')}{\sqrt{\eta_0-\eta'}}d\eta' \tag{7}$$

Таким образом, получается известное [4] значение потенциала на полубесконечном твердом теле.

Вблизи края $x=l(t)$ из (7) получается

$$\varphi_-^0=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{l(t)-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{c}\dot{l}(t)}}\int\limits_{x-ct}^{l(t)}f\left(x',t+\frac{x'}{c}-\frac{x}{c}\right)\frac{dx'}{\sqrt{l(t)-x'}} \tag{8}$$

Для деформируемого тела можно удержать члены порядка k, тогда в (6) под знаком интеграла $\varphi_-(\xi',\eta')$ можно брать из (7), т. е. записать решение в виде (6), где $\varphi_-(\xi',\eta')\approx\varphi_-^0(\xi',\eta')$

$$\varphi_-^0(\xi',\eta')=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_a(\eta')}^{\xi'}\frac{d\xi''}{\sqrt{\xi'-\xi''}}\int\limits_{-\xi''}^{\eta'}\frac{f_1(\xi'',\eta'')}{\sqrt{\eta'-\eta''}}d\eta'' \tag{9}$$

Решение (9) имеет место для точек ξ',η', для которых $\eta'>\eta_e$, где $\eta_e=l(0)$, в которых характеристика $\eta''=\eta'$ пересекает кривую $x'=l(t')$, а в точках ξ',η', для которых она пересечет ось x', т. е. для $\eta'<\eta_e$, следует записать

$$\varphi_-^0(\xi',\eta')=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\eta'}^{\xi'}\frac{d\xi''}{\sqrt{\xi'-\xi''}}\int\limits_{-\xi''}^{\eta'}\frac{f_1(\xi'',\eta'')}{\sqrt{\eta'-\eta''}}d\eta'' \tag{10}$$

Таким образом, потенциал на теле в первом порядке дается (6), в котором $\varphi_-\left(\xi^{'},\eta^{'}\right)$ берется из (9) и (10).

Из условия $\varphi_+ = 0$, решая интегральное уравнение для $v(x,t)$, можно найти, следуя [2,3]

$$v_+\left(\xi_0,\eta_0\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\eta_0-\eta_2\left(\xi_0\right)}}\int\limits_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)} v_-\left(x^{'},t^{'}\right)\frac{\sqrt{\eta_2\left(\xi_0\right)-\eta^{'}}}{\eta_0-\eta^{'}}d\eta^{'} \tag{11}$$

где $\eta_2\left(\xi_0\right) = l\left(t_2\right)+ct_2, \quad ct_2 - l\left(t_2\right) = ct - x$.

Переходя к физическим переменным, найдем

$$v_+(x,t) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x-l\left(t_2\right)}}\int\limits_{x-ct}^{l(t_2)} v_-\left(x^{'},t+\frac{x^{'}}{c}-\frac{x}{c}\right)\frac{\sqrt{l\left(t_2\right)-x^{'}}}{x-x^{'}}dx^{'} \tag{12}$$

где по (1)

$$v_- = f\left(x^{'},t+\frac{x^{'}}{c}-\frac{x}{c}\right)-k\varphi_-^0\left(\xi_0,\eta^{'}\right) \tag{13}$$

В случае $f\left(x,t\right) = \text{const}$ можно из (9) получить при $\eta^{'} > \eta_e$

$$\varphi_-^0\left(\xi^{'},\eta^{'}\right) = -\frac{1}{\pi}f\left\{\sqrt{\xi_0-\xi_a\left(\eta^{'}\right)}\sqrt{\eta^{'}+\xi_a\left(\eta^{'}\right)}+\left(\xi^{'}+\eta^{'}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\xi^{'}-\xi_a\left(\eta^{'}\right)}}{\sqrt{\eta^{'}+\xi_a\left(\eta^{'}\right)}}\right\} \tag{14}$$

а из (10) при $\eta^{'} < \eta_e$

$$\varphi_-^0\left(\xi^{'},\eta^{'}\right) = -\frac{f}{2}\left(\xi^{'}+\eta^{'}\right)$$

Подставляя (14) и (15) в (11) и переходя к физическим координатам, получим

$$v_+ = -\frac{2f}{\pi\sqrt{x-l\left(t_2\right)}}\left\{\sqrt{l\left(t_2\right)-x+ct}-\sqrt{x-l\left(t_2\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{l\left(t_2\right)-x+ct}}{\sqrt{x-l\left(t_2\right)}}\right\}-\frac{2kf}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x-l\left(t_2\right)}}$$

$$\cdot\int\limits_{x_e}^{l(t_2)}\left\{\sqrt{l\left(t_3^{'}\right)-x^{'}}\sqrt{ct-x+2x^{'}-l\left(t_3^{'}\right)}+\right.$$

$$\left.+\left(ct-x+x^{'}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{l\left(t_3\right)^{'}-x^{'}}}{\sqrt{ct-x+2x^{'}-l\left(t_3^{'}\right)}}\right\}\frac{\sqrt{l\left(t_2\right)-x^{'}}}{x-x^{'}}dx^{'}-$$

$$-\frac{k}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x-l\left(t_2\right)}}\cdot f\cdot\int\limits_{x-ct}^{x_e}\left(ct-x+x^{'}\right)\frac{\sqrt{l\left(t_2\right)-x^{'}}}{x-x^{'}}dx^{'} \tag{16}$$

где $x_e = \dfrac{\eta_e+x-ct}{2}, \qquad ct_3^{'}+l\left(t_3^{'}\right) = ct^{'}+x^{'}, \qquad ct^{'}-x^{'} = ct-x$.

Таким образом, в простом виде получается распределение скоростей частиц жидкости вне тела. Так же просто получается из (6), (9), (10) значение потенциала скоростей на теле.

В случае немалых k можно ввести $\psi(x,t)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k\varphi\right)\Big|_{y=0}$ и записать свертку

$$\varphi(x,t)=\iint\psi(x',t')S(x-x',t-t')dx'dt' \qquad (17)$$

где интеграл снова берется по $s_0+s_1+s_2$, а функция $S(x,t)$ есть оригинал преобразований Лапласа и Фурье по t и x функции

$$S_{LF}=\frac{1}{k-\sqrt{\frac{s^2}{c^2}+\alpha_1^2}}$$, где s и α_1 – параметры преобразований.

Можно показать, что [5]

$$S(x,t)=-\frac{c}{\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x^2}}-\frac{kc}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{c^2t^2-x^2}}\frac{e^{ku}du}{\sqrt{c^2t^2-x^2-u^2}} \qquad (18)$$

Для малых k

$$S(x,t)=-\frac{c}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x^2}}+\frac{k\pi}{2}\right) \qquad (19)$$

Подставляя (19) в (17) и используя условия $\varphi_+=0$, можно показать, что вблизи края в первом порядке (17) совпадает с (6).

Таким образом, решения, полученные двумя способами вблизи $x=l(t)$, совпадают. Решение задачи проникания деформируемого тела в жидкость дано в [6] альтернирующим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асрян Н. Г., Галин Л. А. Удар цилиндрической оболочки о поверхность сжимаемой жидкости. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, вып. 6, с. 5-10.
2. Костров В. Б. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига.- ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042 - 1050.
3. Красильщикова В. Б. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. - М.: Наука, 1978. 223. с.
4. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. - М.: Наука, 1986, 328. с.
5. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. - М.: Наука, 1969, 343. с.
6. Кубенко В. Д. Об ударе упругой оболочки о поверхность жидкости.- Доповиди АН УРСР, сер. А, 2, 1974, с. 164 - 167.

Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 12.03.1999