ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №2, 2000 Механика

УДК 517.9

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

Асанян Д. Д., Оганесян А. О.

Դ.Ջ. Հասանյան, Ա.Հ. Հովհաննեսյան

$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$ հավասարման ինվարիանտ լուծումները

Աշխատանքում խմբային անալիզով ինվարիանտ լուծումների որոշման հարցը հանգեցվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը: Դիտարկված են անալիտիկ լուծման հնարավոր դեպքերը:

D.J. Hasanyan, A.H. Hovanesyan

Invariant solutions of $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

В работе на основе группового анализа нахождение инвариантных решений сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются случаи, когда возможно аналитическое решение.

1. Введение

В [1] был проведен групповой анализ уравнения с частными производными вида

$$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q \tag{1}$$

где $m, n, p, q \in R$ – произвольные постоянные; $g(u) \in C^2(R)$. Полученные группы преобразований, относительно которых уравнение (1) остается инвариантным, позволяют строить инвариантные решения уравнения (1). Эти решения удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые в некоторых случаях решаются аналитически. В конце рассматриваются физические примеры, решения которых сводятся к частным случаям уравнения (1).

2. Симметрические решения уравнения (1)

Результаты работы [1] можно компактно представить в виде табл. 1 и 2. На основе этих результатов строятся некоторые симметрические решения уравнений (1). Эти решения будут выражаться формулой

$$I_2 = F(I_1) \tag{2}$$

где $I_1 = \varphi_1(x, y, u)$ и $I_2 = \varphi_2(x, y, u)$ – произвольные инварианты соответствующей группы симметрий [2].

Если функцию u, найденную из (2), подставить в (1), то получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Таким образом, нахождение симметрических решений уравнения с частными производными (1) сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, которые иногда решаются до конца. Приведем для некоторых случаев замену переменных и обыкновенное дифференциальное уравнение. Например, подробно рассмотрим случай V) (см. [1]).

V) $n \neq 0,1,2$; m – произвольное число. Тогда можно выделить следующие подслучаи:

a) $g(u) = A(u+\alpha)^{\beta}$. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$u+\alpha = (x+\frac{c_2}{c_1})^{c_5/c_1} F(\theta);\ \theta = (x+\frac{c_2}{c_1})^{c_3/c_1}(y+\frac{c_4}{c_3})^{-1} \tag{3}$$

Таблица 1

$g(u)$	$m, n, p, q, \alpha, \beta$	Инфинитезимальная группа
$A(u+\alpha)^{\beta}$ $A, \alpha, \beta = \mathrm{const}$	$n \neq 0,1,2$	$\xi^1 = c_1x + c_2, \xi^2 = c_3y + c_4, \eta = c_5u + c_6,$ $c_5 = -c_1/(1+2\beta), c_6 = \alpha c_5, c_3 = \beta c_1/(1+2\beta)$
	$n = m = p = $ $= q = 0, \beta \neq 1$	$\xi^1 = c_1x + c_2y + c_3, \xi^2 = c_2x + c_1y + c_4,$ $\eta = 2c_1(u+\alpha)/(1-\beta),$
	$n = m = p = $ $= q = 0, \beta = 1$	$\xi^1 = c_2y + c_3, \xi^2 = c_2x + c_4,$ $\eta = c_1u + a(x,y), a_{xx} - a_{yy} - a = 0$
	$n = m = q = 0,$ $\beta = -1, p = 2$	$\xi^1 = c_1x + c_2, \xi^2 = c_1y + c_3,$ $\eta = (c_4x + c_5)(u+\alpha),$
	$m = q = p = 0,$ $\beta = 0, n = 1$	$\xi^1 = c_1x + c_2, \xi^2 = c_3y + c_4,$ $\eta = c_5u + c_6y + c_7,\ c_5 = 2c_1, c_3 = 3c_1/2$
	$m = q = \beta = 0,$ $n = 1, p = 1$	$\xi^1 = c_1x + c_2, \xi^2 = (c_1 + c_5)y/2 + c_3,$ $\eta = c_5u + c_5Ay^2/2 + c_4y + c_6$
	$m = q = \alpha = 0,$ $\beta = p = n = 1$	$\xi^1 = c_1x + c_2, \xi^2 = c_3,$ $\eta = -c_1u + c_4e^{\lambda y}, \lambda^2 = A$
	$m = \alpha = 0, q = 2$ $-\beta = p = n = 1$	$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \eta = c_3u + c_5uy,$ $\xi^2 = (c_1 + c_3)y/2 + c_5y^2/4 + c_7$
	$m = \beta = 0,$ $n = p, q = 1$	$\xi^1 = c_1x + c_2, \xi^2 = c_4, \eta = c_5u + c_6e^{-\lambda y} + c_7,$ $\lambda = A, c_5 = (n-2)c_1/n$

Тогда для определения функции $F(\theta)$ получим

$$\frac{c_5}{c_1}(\frac{c_5}{c_1}-1)F + \theta F'\frac{c_3}{c_1}(2\frac{c_5}{c_1} - 1 + \frac{c_3}{c_1}) + (\frac{c_3}{c_1})^2\theta^2 F'' - (-1)^m\ \theta^{2(m+1)}(F')^m \times$$

$$\times[\frac{c_5}{c_1}F + \frac{c_3}{c_1}\theta F']^n\ \frac{d}{d\theta}(\theta^2 F') = (-1)^q A\theta^{2q}F^{\beta}[\frac{c_5}{c_1}F + \frac{c_3}{c_1}\theta F']^p (F')^q \tag{4}$$

b) $g(u) = Ae^{\gamma u}$. Тогда

$$u = \frac{c_6}{c_1}\ln(x+\frac{c_2}{c_1}) + F(\theta),\ \theta = (x+\frac{c_2}{c_1})^{\frac{c_3}{c_1}}(y+\frac{c_4}{c_3})^{-1} \tag{5}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид

$$-\frac{c_5}{c_1} + \frac{c_3}{c_1}(\frac{c_3}{c_1} - 1)\theta F' + (\frac{c_3}{c_1})^2\theta^2 F'' - (-1)^m\theta^{2(m+1)}[\frac{c_6}{c_1} + \frac{c_3}{c_1}\theta F'](F')^m \times$$

$$\times[\theta F'+\theta^2 F''] = A(-1)^q \theta^{2q}(F')^q[\frac{c_6}{c_1}+\frac{c_3}{c_1}\theta F']^p e^{\gamma F} \quad (6)$$

Таблица 2

$g(u)$	m, n, p, q	Инфинитезимальная группа
$Ae^{\lambda u}$ $A, \lambda = \text{const}$ $\lambda \neq 0$	$n \neq 0,1,2$ $n+m \neq 0$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4, \eta = c_5$ $c_5 = c_1[(n+m)(p-2)+q(2-n)]/\lambda(n+m),$ $c_3 = (2-n)c_1/(n+m)$
	$n = m = p = q = 0$	$\xi^1 = \varphi_1(x-y)+\varphi_2(x+y), \xi^2 = -\varphi_1(x-y)$ $+\varphi_2(x+y), \eta = -2[\varphi'_1(x-y)+\varphi'_2(x+y)]$
	$n = m = 0,$ $p, q - \forall$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3,$ $\eta = c_5, c_5 = (p-2+q)c_1/\lambda$
произвольная	$n, m, q, p - \forall,$ $n+m \neq 0$	$\xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2,$ $\eta = 0$
	$n+m=0,$ $p+q=2$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_1 y + c_3,$ $\eta = 0$
	$n=2, m=-2,$ $p+q \neq 1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4,$ $\eta = [g(u)]^{-\alpha}(c_5+\beta)\int[g(u)]^{\alpha} du,$ $\alpha = 1/(p+q-1), \beta = [c_1(p-2)+qc_3]\alpha$
	$n=2, m=-2,$ $p+q=1$	$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4,$ $\eta = g(u)[c_1(p-2)+qc_3]/g'(u)$

c) $n+m=0$, $p+q=2$, $g(u)$-произвольно, тогда замена переменных

$$u = F(\theta),\ \theta = (x+\alpha)(y+\beta)^{-1}$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\theta^2 F''-[\theta^4 F''+2\theta^3 F'](\theta F')^n(-\theta^2 F')^m = g(F)(\theta F')^p(-\theta^2 F')^q \quad (7)$$

d) $g(u)$ -произвольная функция, $n+m \neq 0$. Тогда подстановка

$$u = F(\theta),\ \theta = x - \frac{c_1}{c_2}y \quad (8)$$

приводит к следующему уравнению для неизвестной функции F

$$F''[1-(-1)^m(\frac{c_1}{c_2})^{m+2}(F')^{m+n}] = (-\frac{c_1}{c_2})^q g(F)(F')^{p+q} \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые подслучаи из случая I) (см. [1]). Например, в случае с), когда $p=q=0$ и $g(u)=e^{-2\lambda u}$, после замены переменных

$$u = \frac{1}{\lambda}Lny + F(\theta),\ \theta = y - \frac{x^2}{y} \quad (10)$$

уравнение (1) сводится к уравнению

$$2\theta F' - \theta^2 F'' = e^{-2\lambda F}. \tag{11}$$

В табл. 3 приведена замена переменных и полученные обыкновенные дифференциальные уравнения (1). В табл. 3 приведены также некоторые другие дополнительные дифференциальные уравнения, рассмотренные в [1].

Таблица 3

Случаи	Замена переменных	Дифференциальное уравнение
$g(u) = A(u+\alpha)^\beta$ $\beta \neq 1$ $n = m = p = q = 0$,	$u + \alpha = (x + \gamma y + \delta)^{2/(1-\beta)} F(\theta)$, $\theta = (x + \gamma y + \delta)(y + \gamma x + e)^{-1}$	$2(1+\beta)(1-\gamma^2)F(\theta)/(1-\beta)^2 +$ $+(1-\gamma^2)[4\theta/(1-\beta) -$ $-2\theta^3]F'(\theta) + \theta^2(1-\theta^2)F''(\theta)$ $= AF^\beta(\theta)$
$g(u) = \lambda^2 u$ $n = p = 1$ $m = q = 0$	$u = ae^{\lambda y} + be^{-\lambda y} + (x+c)^{-1}F(\theta)$ $\theta = (x+c)e^{-dy}, a = c_4/c_1$, $b = c_5/c_1, c = c_2/c_1, d = c_1/c_3$	$2F - 2\theta F' + \theta^2 F'' - d^2[-F + \theta F']$ $\times[\theta F' + \theta^2 F''] = \lambda^2 F[-F + \theta F']$
$n = m = q = 0$ $p = 2$ $g(u) = 2(u+\alpha)^{-1}$	$u + \alpha = (x + \alpha_1)^r e^{\alpha_3 x} F(\theta)$, $\theta = (x + \alpha_1)(y + \alpha_2)^{-1}$	$F''(\theta) - \theta F''(\theta) - 2F'(\theta) -$ $-[F'(\theta)]^2 = 0$
$m = 0$ $n = p, q = 1$ $g(u) = A = cons$	$u = (x + c_2/c_1)^{c_5/c_1} F(\theta) -$ $-c_6 e^{Ay}$ $\theta = c_1 y/c_4 + Ln(x + c_2/c_1)$	$(b-1)(bF + F') + bF' + F'' -$ $-F''[bF + F']^n =$ $= -\lambda F'[bF + F']^n, b = c_5/c_1$
$n = p = 1$ $m = q = 0$ $g(u) = \lambda$	$u = -\lambda y^2/2 + c_4 y/c_1 +$ $+c_6/c_1 + (x + c_2/c_1)F(\theta)$ $\theta = (x + c_2/c_1)(y + 2c_3)/$ $/(c_1 + c_5))^{-2c_1/(c_1+c_5)}$	$b(b-1)F + 2b\theta F' + \theta^2 F'' -$ $-2a[bF + \theta F']\cdot[(1+2a)\times$ $\times\theta F' + 2c\theta^2 F''] = 0$ $b = c_5/c_1, a = 1/(1+b)$ $c = 2/(1 + c_3/c_1)$

3. Аналитические решения для уравнения (1)

Приведем некоторые примеры, когда дифференциальное уравнение (1) решается аналитически. В случае VI) (см. [1]), когда $m = 0$, $n - \forall$, $p = n$, $q = 1$, $g(u) = A = \mathrm{const}$, после замены переменных

$$u(x,y) = (x + c_2/c_1)^{c_5/c_1} F(\theta) - c_6 e^{\lambda y}/c_5 \tag{12}$$

где $\theta = c_1 y/c_4 + \ln(x + c_2/c_1)$, уравнение (1) сводится к

$$\left(\frac{c_5}{c_1} - 1\right)\left(\frac{c_5}{c_1}F + F'\right) + \frac{c_5}{c_1}F' + F'' - F''\left[\frac{c_5}{c_1}F + F'\right]^n = -\lambda F'\left(\frac{c_5}{c_1}F + .F'\right)^n \tag{13}$$

Если положить $\lambda = -c_5 / c_1$, то можно снизить порядок уравнения (13) и получить:

1) при $Z \neq 0$ имеем

$$\ln Z - Z^n / n = (\lambda + 1)\theta + A_0, A_0 = \mathrm{const} \tag{14}$$

где $Z = -\lambda F + F'$

2) при $Z = 0$ имеем

$$F' - \lambda F = 0, \text{ или } F = Be^{\lambda\theta}, B = \mathrm{const} \tag{15}$$

Рассмотрим случай II). При $p = 1, q = 1, g(u) = \lambda = \mathrm{const}$, после замены переменных

$$u(x,y) = \frac{c_4}{c_1} e^{-\lambda y} + \frac{c_5}{c_1} + (x + \frac{c_2}{c_1})^{-1} F(\theta), \; \theta = (x + \frac{c_2}{c_1}) e^{-\frac{c_1}{c_3} y} \tag{16}$$

для определения функции $F(\theta)$ получим следующее уравнение

$$\theta^2 F'' - 2F - (\frac{c_1}{c_3})^2 (\theta F' + F)(\theta^2 F'' + \theta F') = -\lambda \frac{c_1}{c_3} \theta(\theta F' + F) F' \tag{17}$$

Уравнение (17) получено при условии $c_1 \neq 0$. Если $c_1 = 0$, то после замены переменных

$$u(x,y) = -\frac{c_4}{\lambda c_3} e^{-\lambda y} + \frac{c_5}{c_3} y + F(\theta), \text{ где } \theta = x - \frac{c_2}{c_3} y \tag{18}$$

Тогда для определения функции $F(\theta)$ получим

$$F''[1 - (\frac{c_2}{c_3})^2 F'] = \lambda F'(\frac{c_5}{c_3} - \frac{c_2}{c_3} F') \tag{19}$$

Легко заметить, что уравнение (19) имеет решение

$$F = Be^{\gamma\theta} \text{ где } \gamma = \lambda \frac{c_5}{c_1}, c_5 = \frac{c_3^2}{c_2}. \tag{20}$$

4. Физические примеры

4.1. Продольные колебания балки. Известно [3], что продольные колебания балки под действием продольной силы F описываются уравнением вида

$$\rho u_{tt} - \sigma_x = F(x, t, u, u_x, u_t, ...) \tag{21}$$

где ρ, u и σ – плотность, перемещение и усилие балки (здесь t – время, x – продольная координата). В частном случае, когда $F(x, t, u_x, u_t, ...) = g(u) u_x^p u_t^{q-n}$ и $\sigma = E_0 u_x^{m+1}$, $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, уравнение (21) после очевидного преобразования принимает вид (1).

4.2. Одномерный газ. Уравнение движения сферически симметричного одномерного газа можно представить в виде [4,5]

$$\rho_t + (\rho u)_r + 2\rho u r^{-1} = 0$$

$$u_t + u u_r + \rho^{-1} p_r = 0 \tag{22}$$

$$p = c^2 \rho,\ c^2 = \text{const},$$

где c, ρ, p, u -скорость звука, плотность, давление, перемещение среды, соответственно. Введя функцию $\mu(r,t)$ по формулам

$$\rho r^2 = \mu_r,\ \rho u r^2 = -\mu_t \tag{23}$$

и перейдя от переменных (t,r) к (τ,μ), где $t_\tau = 1, t_\mu = 0$, можно показать, что для решения системы (22) достаточно решить уравнение

$$r_{\tau\tau} - r_\mu^2 r_{\mu\mu} = 2r^{-1} \tag{24}$$

и по формулам (23) восстановить функции ρ и u. Уравнение (24) совпадает с (1) при $n = p = q = 0, m = -2, f(u) = 2u^{-1}$. Как заметил М. М. Минасян [5], уравнение вида (1) получается также для общей модели политропного газа ($p = c^2\rho^\gamma$). В этом случае получается уравнение

$$r_{\tau\tau} - r_\mu^{-(\gamma+1)} r_{\mu\mu} = 2r^{-1} \tag{25}$$

которое тоже имеет вид (1).

4.3.Уравнения мелкой воды. Система уравнений мелкой воды переменной глубины имеет вид [2,4]

$$\eta_t + [(\eta + h)u]_x = 0, \quad u_t + u u_x + g\eta_x = 0 \tag{26}$$

где $\eta(x,t)$ – форма волны, $h(x)$ – переменная глубина, $u(x,t)$ – горизонтальная скорость частиц жидкости на свободной поверхности и g – ускорение свободного падения [4,5]. Если с помощью формул

$$\eta + h = \mu_x,\ (\eta + h)u = -\mu_t$$

перейти к переменным (τ,μ), где $t_\tau = 1, t_\mu = 0$, то получим уравнение

$$x_{\tau\tau} - x_\mu^{-3} x_{\mu\mu} = h'(x) \tag{27}$$

которое совпадает с уравнением (1), когда $n = p = q = 0$, $m = -3$, $f(x) = h'(x)$. Решение последнего, как и в предыдущем примере, позволяет найти решение системы (26).

Отметим, что в последних двух примерах материальные постоянные приняты равным единице.

Все приведенные примеры имеют только иллюстративный характер, показывающий, что уравнение вида (1) может получиться в различных отраслях механики.

Выражаем благодарность М. М. Минасяну за сделанные замечания и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанян Д.Д., Оганесян А.О. Групповой анализ уравнения $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$.- Изв. НАН Армении, Механика, 2000, 53, №1, с. 34-42.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. -М.: Наука, 1983.
3. Arrigo D.J., Group Properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$ - Int. J. Non-Linear Mech., 26(1), 619-629, 1991.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Ж.- Теория упругости. М.: Наука, 1970.
5. Arrigo D.J., Wentzell R.A., Lastman G.J. Motion of planar bubble boundaries.-Int. J. Non-Linear Mech., 25(1), 87-97, 1990.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1999