Մեխանիկա 53, №2, 2000 Механика
УДК 539.3

ОБ УПРОЩЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ТЕЛ В РАМКАХ ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГОСТИ

Овакимян Р.Н.

Ռ.Ն. Հովակիմյան

Բարակ մարմինների կայունության խնդիրների լուծումների պարզեցման մասին՝ մագնիսաառաձգականության տեսության շրջանակներում

Մագնիսաառաձգականության տեսության ձևավորման էտապում /60–ական թվականներ/ Մաքսվելի հավասարումները գրվել են ամբողջ տարածության մեջ՝ բոլոր անդամների հաշվառմամբ, որը բերել է խնդիրների լուծման էական բարդեցմանը: Այս հոդվածում ցույց է տրվում, որ $h/R \le 1/20$ դեպքում հաղորդիչ մակերևույթի մոտ կարելի է Մաքսվելի հավասարումները գրել քվազիստացիոնար տեսքով նույնիսկ մինչև 10^6 հց հաճախության տատանումների դեպքում: Կատարված պարզեցումը բերում է էլեկտրամագնիսական դաշտի գրգռումների պարզ արտահայտությունների, որոնք լիովին համապատասխանում են մագնիսաառաձգականության վարկածներին:

R.N. Ovakimyan

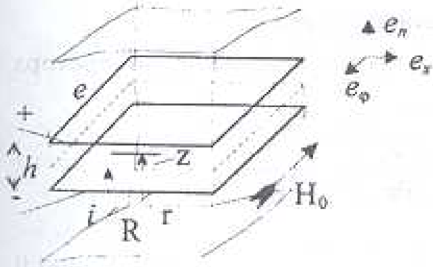
On Simplification of Solutions of the Stability Problems of Thin-Walled Bodies in the Limits of Magnetoelasticity Theory

В статье предлагается упрощенный вариант постановки и решения задач магнитоупругих колебаний тонких оболочек. Обоснованием предлагаемого варианта служит сравнение с известными решениями.

В период зарождения магнитоупругости (60-е годы) как новой области науки, уравнения Максвелла записывались полностью, с учетом всех членов, а решения уравнений проводились во всем пространстве. Наглядно это видно в [1], где рассматривались осесимметричные колебания оболочки в продольном магнитном поле. В такой постановке задачи решение электромагнитных уравнений Максвелла оказывалось математически сложным делом, причем получаемые конечные результаты имели громоздкий вид, который был непригоден для практических расчетов. Помимо всего, становилось очевидным, что точное решение уравнений Максвелла и их применение в приближенной теории оболочек, построенной с точностью до $h/R \le 1/20$, не имело смысла. (Здесь h – толщина стенки оболочки, R – радиус срединной поверхности). Необходимы были упрощения уравнений Максвелла в рамках данной погрешности h/R.

Первый шаг в этом направлении, по-видимому, был сделан в начале 70-х годов [2], где была выдвинута и обоснована гипотеза магнитоупругости, являющаяся как бы продолжением гипотезы Кирхгофа–Лява, принятой для обычных случаев. Далее в работе [3] была определена область фактического затухания возмущений напряженности магнитного поля, ограниченная полудлинами волн возмущения по обе стороны от поверхностей проводящей колеблющейся пластинки.

Следует учесть, что еще И.Е. Тамм в своей фундаментальной работе [4] предлагал общие уравнения Максвелла считать квазистационарными и пренебречь током смещения $\partial D/\partial t$ вплоть до технически возможных колебаний 10^6 [1/сек]. Поэтому, с учетом приведенных условий, во многих



Фиг. 1

задачах магнитоупругости общие уравнения Максвелла следует заменить более простыми – квазистационарными уравнениями.

Но здесь предлагаются дополнительные упрощения в рамках погрешности $h/R \leq 1/20$.

Вновь рассматривается задача [1] для более контрастного представления введенных упрощений. Принимается Международная система измерений СИ. Материал цилиндрической оболочки по-прежнему считается изотропным и конечной проводимости σ. Итак, в цилиндрической системе координат x, φ, r имеем:

1) в толще оболочки $R - h/2 \leq r \leq R + h/2$ следующие квазистационарные уравнения Максвелла:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{j},\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{b}/\partial t,\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{b} = \mu\mu_0 \boldsymbol{h},\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0 \qquad (1)$$

2) в пограничном слое окружающей непроводящей $r < R - h/2,\ r > R + h/2$ среды (e, i)

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\mathbf{h}^{(e,i)} = 0,\ \ \mathbf{D}^{(e,i)} = \varepsilon^{(e,i)}\varepsilon_0 \mathbf{E}^{(e,i)},\ \ \mathbf{b}^{(e,i)} = \mu^{(e,i)}\mu_0 \mathbf{h}^{(e,i)} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}^{(e,i)} = -\partial \mathbf{b}^{(e,i)}/\partial t,\ \ \mathrm{div}\mathbf{b}^{(e,i)} = 0\end{gathered} \qquad (2)$$

Заметим, что подавляющее число материалов в природе являются парамагнетиками или диамагнетиками, у которых коэффициент относительной магнитной проницаемости $\mu = 1 \pm (10^{-4} \div 10^{-7})$ мало отличается от единицы. Поэтому, в рамках допустимой погрешности $h/R \leq 5 \cdot 10^{-2}$ следует считать $\mu = 1$ (как в вакууме). Ферромагнетики, у которых $\mu >> 1$, и сверхпроводники, где $\mu = 0$, здесь не рассматриваются. Магнитная постоянная вакуума $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Н/a^2. Таким образом, $\mu^{(e,i)}$ принимается одинаковой и равной вакууму $(\mu = 1)$.

В оболочке возникают осесимметричные колебания $(\partial/\partial\varphi = 0)$ типа бегущей волны $\zeta = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$, где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота колебаний. Ввиду радиальных колебаний оболочки ζ в ее толщине индуцируется ток проводимости, в общем случае равный

$$\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B})$$

В нашем случае $\boldsymbol{E}$ – напряженность индуцируемого электрического поля, $\mathbf{v} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}\mathbf{e}_n$ – скорость элемента оболочки, $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{b}(x, r, t)$ – вектор магнитной индукции.

В цилиндрической системе координат, в пренебрежении произведением малых величин, окончательно получим

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + B_0 \frac{\partial\zeta}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi\right)$$

где e_x, e_φ, e_n — единичные орт-векторы данной системы.

Для справки выпишем составляющие дифференциального оператора некоего вектора a при $\partial/\partial\varphi = 0$:

$$\mathrm{rot}a = -\left(\frac{a_\varphi}{r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r}\right)e_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial r} - \frac{\partial a_n}{\partial x}\right)e_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial x}e_n$$

$$\mathrm{div}a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_n}{\partial r} + \frac{a_n}{r} \tag{3}$$

В рассматриваемом случае вследствие малой толщины стенки оболочки ток в радиальном направлении технически невозможен и поэтому принимается $E_n = 0$. Но тогда, согласно уравнению Максвелла (плотность зарядов $\rho_e = 0$), $\mathrm{div}E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_n}{\partial r} + \frac{E_n}{r} = 0$ следует, что $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ и $E_x = 0$. Таким образом, возмущение напряженности электрического поля возможно лишь в окружном направлении φ. Следовательно,

$$j = \sigma\left(E_\varphi + B_0\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)e_\varphi \tag{4}$$

С учетом сказанного напишем квазистационарные уравнения Максвелла в толще оболочки (1)

$$\begin{cases} \frac{\partial h_x}{\partial r} - \frac{\partial h_n}{\partial x} = \sigma\left(E_\varphi + B_0\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) \qquad \mathbf{b} = \mu_0\mathbf{h} \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial b_n}{\partial t}, \ \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_n}{\partial r} + \frac{b_n}{r} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Возмущение магнитной напряженности поля h_n ищем в виде функции $h_n = H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}f(r)$, несколько отличающейся от ранее принятого в [1] $h_n = H_0 e^{i(kx-\omega t)}f(x)$. Из системы уравнений (5), где для материала оболочки $b_n = \mu_0 h_n$, получим дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого будет

$$f(r) = -\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\{kr\alpha[I_0(kr\alpha)K_1() - K_0()I_1()] - [I_1(kr\alpha)\int K_0()d() + \\ + K_1(kr\alpha)\int I_0()d()]\} + C_1 I_1(kr\alpha) + C_2 K_1(kr\alpha) \tag{6}$$

В выражении (6) C_1, C_2 — произвольные постоянные, $I_0(kr\alpha),...$ — бесселевы функции нулевого и первого порядка чисто мнимого аргумента (в дальнейшем аргумент в скобках не пишется), коэффициент $\alpha^2 = 1 - k_m^2/k^2$, где в общем случае постоянная $k_m^2 = i\omega\mu\mu_0'\sigma$ есть квадрат электромагнитного волнового числа.

Для справки приведем соотношения между бесселевыми функциями: $I_0()K_1() + I_1()K_0() = 1/kr\alpha$ и в случае осесимметричных колебаний

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=0,\ I_1()=\frac{dI_0()}{d()},\ K_1()=-\frac{dK_0()}{d()}$$
$$\frac{dI_1()}{d()}=I_0()-\frac{I_1()}{kr\alpha},\ \frac{dK_1()}{d()}=-K_0()-\frac{K_1()}{kr\alpha} \tag{7}$$

Согласно первому соотношению

$$f(r)=-\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\left\{1-\left[I_1()\int K_0()d()+K_1()\int I_0()d()\right]\right\}+C_1I_1(kr\alpha)+C_2K_1(kr\alpha) \tag{8}$$

После подстановки (8) в выражение h_n, из последнего уравнения (5) – уравнения непрерывности, получим, используя (7), $b_z=\mu_0h_z$

$$h_z=iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left\{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\left[I_0()\int K_0()d()+K_0()\int I_0()d()\right]+\alpha\left[C_1I_0()+C_2K_0()\right]\right\} \tag{9}$$

Заметим, что интегралы $\int I_0()d()$ и $\int K_0()d()$ являются неберущимися в элементарных функциях. Поэтому для их решения разлагаем функции Бесселя $I_0(),\ K_0()$ в ряд Тейлора на 3 члена (ввиду малой величины $h/R\le 1/20$). Таким образом, в выражениях (8) и (9), разлагая функции Бесселя $I_1(),\ K_1()$ на 2 члена, так как $I_1=dI_0()/d()$, а $K_1()=-dK_0()/d()$, получим

$$I_1()\int K_0()d()+K_1()\int I_0()d()\approx\frac{z}{R}\left(1-\frac{z}{R}\right)$$
$$I_0()\int K_0()d()-K_0()\int I_0()d()\approx\frac{kz^2\alpha}{2R} \tag{10}$$

где переменная по толщине оболочки $-h/2\le z\le h/2$.

После подстановки (10), соответственно в (8) и (9), возмущения напряженности магнитного поля будут

$$h_n=H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[-\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{z}{R}\right)+C_1I_1(kr\alpha)+C_2K_1(kr\alpha)\right]$$
$$h_z=iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left\{\frac{1-\alpha^2}{2}\frac{kz^2}{R}+\alpha\left[C_1I_0(kr\alpha)+C_2K_0(kr\alpha)\right]\right\} \tag{11}$$

В выражении h_n пренебрегаем величиной z^2/R^2 в малых скобках относительно единицы. Решая квазистационарные уравнения Максвелла (2) для окружающей оболочку наружной среды, получим

$$h_n^{(e,i)}=H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[C_3I_1^{(e,i)}(kr)+C_4K_1^{(e,i)}(kr)\right]$$
$$h_z^{(e,i)}=iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[C_3I_0^{(e,i)}(kr)-C_4K_0^{(e,i)}(kr)\right] \tag{12}$$

Для определения произвольных постоянных $C_1\div C_4$ используем 4 граничных условия Максвелла – по 2 на наружной $(z=h/2)$ и внутренней $(z=-h/2)$ поверхностях оболочки, граничащих с наружной (e) и внутренней (i) средой. Например, для наружной среды

$$\boldsymbol{e}_n\times\left(\boldsymbol{h}^{(e)}-\boldsymbol{h}^{(+)}\right)=0,\ \ \boldsymbol{e}_n\cdot\left(\boldsymbol{b}^{(e)}-\boldsymbol{b}^{(+)}\right)=0 \tag{13}$$

Эти граничные условия (13) будут

$$1)\ h_x^{(+)}=h_x^{(e)},\quad 2)\ b_n^{(+)}=b_n^{(e)},\quad 3)\ h_x^{(-)}=h_x^{(i)},\quad 4)\ b_n^{(-)}=b_n^{(i)} \tag{14}$$

Ранее в [5] разложение функций Бесселя проводилось на 2 члена ряда Тейлора, вследствие чего одно из граничных условий было тождественно равно другому. Поэтому было предложено дополнительное условие— равенство на граничных поверхностях оболочки первой производной величины возмущения поля в радиальном направлении. Следует заметить, что выражения произвольных постоянных были полностью идентичны их виду, полученному в нашем случае решения задачи.

Выпишем в развернутом виде граничные условия (14):

$$\begin{aligned}
&1)\, iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left\{\left(1-\alpha^2\right)\frac{kh^2}{8R}+\alpha\left[C_1I_0^{(+)}()-C_2K_0^{(+)}()\right]\right\}=iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(C_3I_0^{(e)}-C_4K_0^{(e)}\right)\\
&2)\, \mu_0H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[-\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{h}{2R}\right)+C_1I_1^{(+)}()-C_2K_1^{(+)}()\right]=\mu_0H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(C_3I_1^{(e)}+C_4K_1^{(e)}\right)\\
&3)\, iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left\{\left(1-\alpha^2\right)\frac{kh^2}{8R}+\alpha\left[C_1I_0^{(-)}()-C_2K_0^{(-)}()\right]\right\}=iH_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(C_3I_0^{(i)}-C_4K_0^{(i)}\right)\\
&4)\, \mu_0H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[-\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\left(1+\frac{h}{2R}\right)+C_1I_1^{(-)}()-C_2K_1^{(-)}()\right]=\mu_0H_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(C_3I_1^{(i)}+C_4K_1^{(i)}\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Как было решено ранее, разложим бесселевы функции $I_0(x), K_0(x)$ на 3 члена ряда, а $I_1(x), K_1(x)$ – по-прежнему, на 2. Далее, складывая и вычитая выражения возмущений поля (15) на граничных поверхностях оболочки 1), 3) и 2), 4), составим простые соотношения относительно R

$$\begin{aligned}
&C_1I_1(kR\alpha)+C_2K_1(kR\alpha)-\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}=C_3I_1(kR)+C_4K_1(kR)\\
&\alpha\left[C_1I_0(kR\alpha)-C_2K_0(kR\alpha)\right]=C_3I_0(kR)-C_4K_0(kR)\\
&\alpha^2\left[C_1I_1(kR\alpha)+C_2K_1(kR\alpha)\right]=C_3I_1(kR)+C_4K_1(kR)\\
&\alpha^3\left[C_1I_0(kR\alpha)-C_2K_0(kR\alpha)\right]+\frac{1-\alpha^2}{kR}=C_3I_0(kR)-C_4K_0(kR)
\end{aligned} \tag{16}$$

Из этой системы уравнений (16) легко отделить по 2 уравнения, действующие в толще проводящей оболочки и вне ее $(\sigma=0)$.

$$\begin{aligned}
&C_1I_1(kR\alpha)+C_2K_1(kR\alpha)=1/\alpha^2, \qquad C_3I_1(kR)+C_4K_1(kR)=1\\
&C_1I_0(kR\alpha)-C_2K_0(kR\alpha)=1/kR\alpha, \quad C_3I_0(kR)-C_4K_0(kR)=1/kR
\end{aligned} \tag{17}$$

Решив уравнения системы (17), окончательно получим значения произвольных постоянных:

$$C_1 = \frac{kR}{\alpha} K_0(kR\alpha) + K_1(kR\alpha), \quad C_3 = kRK_0(kR) + K_1(kR)$$
$$C_2 = \frac{kR}{\alpha} I_0(kR\alpha) - I_1(kR\alpha), \quad C_3 = kRI_0(kR) - I_1(kR) \tag{18}$$

Простые выражения постоянных (18) получены без утомительных математических вычислений. Но для их подтверждения были вычислены обычным путем определители системы (15), где $D = \frac{k^2h^4}{8R^2}\left(1-\alpha^2\right)^2$, $D_1 = DC_1$, $D_2 = DC_2$, $D_3 = DC_3$, $D_4 = DC_4$,
так что, действительно, $C_1 = D_1 / D = kRK_0(kR\alpha)/\alpha + K_1(kR\alpha)$ и т.д.

После подстановки значений C_1 и C_2 в выражения возмущений поля (11) и разложения в ряд функций Бесселя, получим

$$h_n = H_0 \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad h_x = iH_0 \frac{\partial\zeta}{\partial x}\left(kz + \frac{1}{kR}\right) \tag{19}$$

Из этих выражений (19) следует справедливость гипотезы магнитоупругости [2] о неизменности нормальной составляющей возмущения магнитной напряженности в толще оболочки h.

В случае пластинки $(R \to \infty)$ из (19) следует

$$h_n = H_0 \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad h_x = iH_0 \frac{\partial\zeta}{\partial x} kz = H_0 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} z \tag{20}$$

Таким образом, возмущения поля можно выразить простыми выражениями (19), (20), что не идет ни в какое сравнение с их прежними выражениями в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. — Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1967, т.20, №5, с.21-27.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. — М.: Наука, 1977. 273с.
3. Белубекян М.В. К задаче колебаний токонесущих пластин. — Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1975, т.28, №2, с.22-30.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. 616с.
5. Овакимян Р.Н. О возмущениях электромагнитного поля в магнитоупругости тонких оболочек. — Тезисы докл. IV-го Межд. сем.-сов., М.: Изд.МГТУ, 1996, с. 57-58.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
9.10.1997