ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №2, 2000** Механика
УДК 539.3

ВОЛНЫ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ У СВОБОДНОГО ТОРЦА КРУГОВОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С МАЛОЙ КРИВИЗНОЙ

Гулгазарян Г.Р.

Գ.Ռ. Ղուլղազարյան
Փոքր կորության, փակ շրջանային գլանային թաղանթի ազատ ճակատում տեղայնացված ալիքներ

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթ (ոչ ծռման), Ռելեի տիպի ալիքների տարածման հարցը, որոնք մարում են կիսաանվերջ շրջանային գլանային թաղանթի ազատ ճակատից ծնիչի ուղղությամբ: Հետազոտումը կատարվում է բարակ, առաձգական, իզոտրոպ թաղանթի համար հաշվի առնելով ծռման կոշտության առկայությունը և կորության փոքրությունը: Մասնավորապես դիտարկվում են առավելապես ծռման և առավելապես տանգենցիալ տատանման դեպքերը: Կապ է հաստատվում դիտարկվող խնդիրների և կիսաանվերջ սալի համար համանման խնդիրների դիսպերսիոն հավասարումների միջև:

G.R. Ghulghazaryan
The waves localized at the free edge of closed circular cilindrical shell with small curvature

В работе исследуется вопрос распространения волн типа Рэлея, затухающей от свободного торца полубесконечной круговой цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для изотропной упругой полубесконечной оболочки при наличии изгибной жесткости и малой кривизны. В частности, исследуется случай преимущественно изгибных колебаний и преимущественно тангенциальных колебаний. Устанавливается связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для полубесконечной пластинки.

Вопросы распространения плоской волны "Рэлеевского" типа рассмотрены в работах [1-4].

1. Общий случай. В качестве исходных уравнений возьмем следующие уравнения, соответствующие технической теории цилиндрических оболочек [5,6]:

$$\Gamma u_1 = \frac{1}{R}\left(\sigma\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{2\lambda\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}\right)$$

$$\Gamma u_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3} + (2+\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2} + \frac{2\lambda}{1-\sigma}\frac{\partial u_3}{\partial\beta}\right) \tag{1.1}$$

$$\mu^4\Gamma\Delta\Delta u_3 - \lambda\Gamma u_3 + \frac{1}{R^2}\left((1-\sigma^2)\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^4} + \lambda\Delta u_3 + 2(1+\sigma)\lambda\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}u_3\right) = 0$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — проекции смещения точки срединной поверхности, α, β — ортогональные координаты точки срединной поверхности, R — радиус направляющей окружности, $\mu^4 = h^2/12$ (h — толщина оболочки),

$$\lambda = (1-\sigma^2)\omega^2\rho/E \tag{1.2}$$

где ρ — удельная плотность материала оболочки, E — модуль Юнга, σ —

коэффициент Пуассона, ω — угловая частота, Δ — оператор Лапласа.

Оператор Γ имеет вид

$$\Gamma \equiv \Delta\Delta + (3-\sigma)(1-\sigma)^{-1}\lambda\Delta + 2(1-\sigma)^{-1}\lambda^2 \tag{1.3}$$

Обозначим $1/R = k\varepsilon$, где $k > 0$. Граничные условия принимают вид

$$\left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right)\right|_{\alpha=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial\beta} + 4\mu^4\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\right)\right|_{\alpha=0} = 0,\ \left.\sum_{j=1}^{3}|u_j|\right|_{\alpha=+\infty} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{2-\sigma}{R}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\alpha=0} = 0,\ u_i(\alpha,\beta) = u_i\left(\alpha, \beta + \frac{2\pi}{k}\right),\ i = \overline{1,3}$$

Решение системы (1.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u\cos km\beta,\ v\sin km\beta,\ \cos km\beta)\exp(km\chi\alpha) \tag{1.5}$$

где $m \neq 0$ -целое. Обозначим

$$\eta^2 = 2\lambda/\left(k^2m^2(1-\sigma)\right),\ a^2 = k^2\mu^4,\ A^2 = (1-\sigma)/\left(2a^2m^2\right) \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) в (1.1), получим формулы

$$mc(\chi)u = \varepsilon\chi a(\chi),\ mc(\chi)v = -\varepsilon b(\chi),\ b(\chi) = (2+\sigma)\chi^2 + \eta^2 - 1 \tag{1.7}$$

$$a(\chi) = 1 + \sigma\eta^2 + \sigma\chi^2,\ c(\chi) = (\chi^2-1)^2 + (3-\sigma)/2\eta^2(\chi^2-1) + (1-\sigma)/2\eta^4$$

и характеристическое уравнение

$$\prod_{j=1}^{4}\left(\chi^2 - x_j^2\right) + m^{-2}\varepsilon^2A^2\left(2(1+\sigma)\chi^4 + (3+2\sigma)\eta^2\chi^2 - \eta^2x_1^2\right) = 0 \tag{1.8}$$

где

$$x_1^2 = 1-\eta^2,\ x_2^2 = 1-(1-\sigma)/2\eta^2,\ x_3^2 = 1 - A\eta,\ x_4^2 = 1 + A\eta \tag{1.9}$$

Исходя из критерия Гурвица, можно доказать, что при любом a^2, σ и ε существуют $m = m_0$ и $\eta = \eta_0$ $(0 < \eta_0 < 1)$ такие, что для всех η и m, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \eta \le \eta_0,\ |m| \ge |m_0| \tag{1.10}$$

все четыре χ^2 — корни уравнения (1.8) имеют положительные действительные части. Последнее высказывание эквивалентно тому, что система уравнений (1.1) при условии (1.10) имеет четыре решения вида (1.5), которые затухают при $\alpha \to +\infty$. Здесь и далее предположим, что $m > 0$.

Пусть χ_j $(j = \overline{1,4})$ являются корнями уравнения (1.8) с отрицательными действительными частями и $\left(u_1^j, u_2^j, u_3^j\right)$, $j = \overline{1,4}$ являются решениями системы (1.1) вида (1.5) при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,4}$ соответственно.

Решение задачи (1.1), (1.4) представим в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\sum_{j=1}^{3} w_j u_1^j,\ \sum_{j=1}^{3} w_j u_2^j,\ \sum_{j=1}^{3} w_j u_3^j\right) \tag{1.11}$$

Подставляя (1.11) в (1. 4), придем к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{ij}}{c(\chi_j)} w_j = 0, \ i = \overline{1,4} \tag{1.12}$$

где

$$R_{1j} = (\chi_j^2 - \sigma)c(\chi_j) - \varepsilon^2 \sigma b(\chi_j)/m^2, \ R_{2j} = \chi_j^2 a(\chi_j) - \sigma b(\chi_j) - \sigma c(\chi_j)$$
$$R_{3j} = \chi_j \left(4a^2 c(\chi_j) + \left(a(\chi_j) + b(\chi_j)\right)/m^2 + 4a^2 \varepsilon^2 b(\chi_j)/m^2\right) \tag{1.13}$$
$$R_{4j} = \chi_j \left((\chi_j^2 - 2 + \sigma)c(\chi_j) - (2-\sigma)\varepsilon^2 b(\chi_j)/m^2\right)$$

Чтобы система (1.12) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель обратился в нуль. Отсюда приходим к уравнению для определения η

$$D = \left|R_{ij}\right|_{i=1,\,j=1}^{4} = 0 \tag{1.14}$$

Легко проверить, что

$$D = k\left|m_{ij}\right|_{i=1,\,j=1}^{4} \tag{1.15}$$

где

$$k = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_1 - \chi_4)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)(\chi_3 - \chi_4)$$
$$m_{11} = \chi_1^6 + d_0\chi_1^4 + d_1\chi_1^2 + d_2, \ m_{12} = (\chi_1 + \chi_2)\left(\chi_1^4 + \chi_1^2\chi_2^2 + \chi_2^{-4} + d_0(\chi_1^2 + \chi_2^2) + d_1\right)$$
$$m_{13} = s_4^2 - s_4\chi_4^2 - s_5 + (s_4 - \chi_4^2)(s_2 - \chi_4 s_1 + \chi_4^2) + d_0(s_4 + s_2 - \chi_4 s_1) + d_1$$
$$m_{14} = (d_0 + s_4)s_1 + s_3, \ m_{21} = d_3\chi_1^2 + d_4, \ m_{22} = d_3(\chi_1 + \chi_2), \ m_{23} = d_3, \ m_{24} = 0$$
$$m_{31} = \chi_1(4a^2\chi_1^4 + d_5\chi_1^2 + d_6) \tag{1.16}$$
$$m_{32} = 4a^2(\chi_1^4 + \chi_1^3\chi_2 + \chi_1^2\chi_2^2 + \chi_1\chi_2^3 + \chi_2^4) + d_5(\chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + \chi_2^2) + d_6$$
$$m_{33} = (4a^2(s_4 - \chi_4^2) + d_5)(s_1 - \chi_4) + 4a^2\chi_1\chi_2\chi_3$$
$$m_{34} = 4a^2(s_4 + s_2) + d_5, \ m_{41} = \chi_1(\chi_1^6 + d_7\chi_1^4 + d_8\chi_1^2 + d_9)$$
$$m_{42} = \chi_1^6 + \chi_1^5\chi_2 + \chi_1^4\chi_2^2 + \chi_1^3\chi_2^3 + \chi_1^2\chi_2^4 + \chi_1\chi_2^5 + \chi_2^6 +$$
$$+ d_7(\chi_1^4 + \chi_1^3\chi_2 + \chi_1^2\chi_2^2 + \chi_1\chi_2^3 + \chi_2^4) + d_8(\chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + \chi_2^2) + d_9$$
$$m_{43} = \left(s_4^2 - s_4\chi_4^2 - s_5 + d_8 + (s_4 - \chi_4^2)d_7\right)(s_1 - \chi_4) + (s_4 - \chi_4^2 + d_7)\chi_1\chi_2\chi_3$$
$$m_{44} = s_4^2 + d_8 - s_5 + s_6 + s_4 d_7 + (s_4 + d_7)s_2, \ s_1 = s_1(\varepsilon) = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$$
$$s_2 = s_2(\varepsilon) = \chi_1\chi_2 + \chi_1\chi_3 + \chi_1\chi_4 + \chi_2\chi_4 + \chi_2\chi_3 + \chi_3\chi_4$$
$$s_4 = s_4(\varepsilon) = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2, \ s_6 = s_6(\varepsilon) = \chi_1\chi_2\chi_3\chi_4$$
$$s_5 = s_5(\varepsilon) = \chi_1^2\chi_2^2 + \chi_1^2\chi_3^2 + \chi_1^2\chi_4^2 + \chi_2^2\chi_3^2 + \chi_2^2\chi_4^2 + \chi_3^2\chi_4^2$$
$$d_0 = (3-\sigma)/2\eta^2 - 2 - \sigma, \ d_1 = 1 + 2\sigma - (3-\sigma)(1+\sigma)/2\eta^2 + (1-\sigma)/2\eta^4 -$$
$$- \sigma\varepsilon^2(2+\sigma)/m^2, \ d_2 = \sigma(\eta^2 - 1)\left(1 - (1-\sigma)/2\eta^2 - \varepsilon^2 m^2\right)$$
$$d_3 = 1 - \sigma^2 - \sigma(1-\sigma)/2\eta^2, \ d_4 = \sigma(1-\sigma)/2(1-\eta^2)\eta^2$$
$$d_5 = 2(1+\sigma)/m^2 + 4a^2\left((3-\sigma)/2\eta^2 - 2\right) + 4a^2\varepsilon^2(2+\sigma)/m^2$$

$$d_6 = 4a^2\left(1-(3-\sigma)/2\eta^2 + (1-\sigma)/2\eta^4\right) + (1+\sigma)/m^2\eta^2 + 4a^2\varepsilon^2/m^2(\eta^2-1)$$
$$d_7 = (3-\sigma)/2\eta^2 - 4 + \sigma,\ d_8 = 5 - 2\sigma - (3-\sigma)^2/2\eta^2 + (1-\sigma)/2\eta^4 -$$
$$-(4-\sigma^2)\varepsilon^2/m^2,\ \ d_9 = (1-\eta^2)(2-\sigma)\left((1-\sigma)/2\eta^2 - 1 + \varepsilon^2\ m^2\right)$$

Аналогичным образом, как в [4], доказывается, что уравнение

$$M(\eta,\varepsilon) = \left|m_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = 0 \tag{1.17}$$

является дисперсионным уравнением задачи (1.1), (1.4). Заметим, что при $\varepsilon = 1$ уравнение (1.17) совпадает с уравнением (1.23) из [4].

При $\eta \neq 0,\ 0 < \varepsilon/m << 1,\ \chi^2$ – корни уравнения (1.8) можно представить в виде

$$\chi_i^2 = x_i^2 + \alpha_i\varepsilon/m + \beta_i(\varepsilon/m)^2 + \ldots,\quad i = \overline{1,4} \tag{1.18}$$

Выражения коэффициентов в рядах (1.18) меняются в зависимости от расположения величин x_i, $i = \overline{1,4}$. Легко проверить, что

$$m_{11} = m_{12} = m_{41} = m_{42} = 0(\varepsilon/m),\ m_{21} = (1-\sigma^2)x_1^2 + 0(\varepsilon/m)$$
$$m_{22} = d_0(x_1 + x_2) + 0(\varepsilon/m),\ \ m_{31} = (1+\sigma)/m^2 x_1(1 + x_1^2) + 0(\varepsilon/m)$$
$$m_{32} = (1+\sigma)/m^2\left(4 - (2-\sigma)\eta^2 + 2x_1x_2\right) + 0(\varepsilon/m)$$
$$m_{13} = (x_3^2 - \sigma)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) + 0(\varepsilon/m),\ m_{14} = (2-\sigma)s_1(0) + s_3(0) + 0(\varepsilon/m)$$
$$m_{43} = -(x_4^2 - \sigma)x_3(x_3 + x_1)(x_3 + x_2) + 0(\varepsilon/m)$$
$$m_{44} = -(x_3^2x_4^2 - 2\sigma - s_6(0) - \sigma s_2(0)) + 0(\varepsilon/m) \tag{1.19}$$

Используя выражения (1.19), уравнение (1.17) можно привести к виду

$$M(\eta,\varepsilon) = N(\eta)\{k_1(\eta)k_2(\eta) + 0(\varepsilon/m)\} = 0 \tag{1.20}$$

где

$$N(\eta) = 0.5m^{-2}(1-\sigma^2)(2+\sigma\eta^2)x_1(x_3 + x_1)(x_3 + x_2)(x_4 + x_1)(x_4 + x_2)$$
$$k_1(\eta) = x_3^2x_4^2 + 2(1-\sigma)x_3x_4 - \sigma^2,\ k_2(\eta) = x_1\left(2(1+\sigma) - \eta^2\right) - \eta^2 x_2 \tag{1.21}$$

Из (1.20) следует, что при $\varepsilon/m \to 0$ уравнение (1.17) распадается на уравнения

$$k_1(\eta) = x_3^2x_4^2 + 2(1-\sigma)x_3x_4 - \sigma^2 = 0 \tag{1.22}$$

$$k_2(\eta) = x_1\left(2(1+\sigma) - \eta^2\right) - \eta^2 x_2 = 0 \tag{1.23}$$

Уравнения (1.22) и (1.23) являются дисперсионными уравнениями, соответствующие изгибному колебанию и планарному колебанию пластин для аналогичной задачи [2], [3]. Заметим, что уравнение (1.23) эквивалентно дисперсионным уравнениям Рэлея для пластин [7]:

$$(2-\eta^2)^4 = 16(1-\eta^2)\left(1-(1-\sigma)/2\eta^2\right) \tag{1.24}$$

2. Преимущественно изгибные колебания. Пренебрегая тангенциальными силами инерции, система (1.1) принимает вид

$$\Delta\Delta u_1 = \frac{1}{R}\left(\sigma\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right),\ \ \Delta\Delta u_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3} + (2+\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right)$$

$$\mu^4 \Delta\Delta\Delta\Delta u_3 - \lambda\Delta\Delta u_3 + (1-\sigma^2)\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^4} = 0 \tag{2.1}$$

Решение системы (2.1) ищем в виде (1.5). Тогда из уравнений (2.1) получим

$$\begin{gathered} mc(\chi)u = \varepsilon\chi a(\chi), \quad mc(\chi)v = -\varepsilon b(\chi) \\ a(\chi) = \sigma\chi^2 + 1, \; b(\chi) = (2+\sigma)\chi^2 - 1, \;\; c(\chi) = (\chi^2 - 1)^2 \end{gathered} \tag{2.2}$$

и характеристическое уравнение

$$(\chi^2 - x_3^2)(\chi^2 - x_4^2)(\chi^2 - 1)^2 + 2(1-\sigma)m^{-2}\varepsilon^2 A^2\chi^4 = 0 \tag{2.3}$$

где x_3^2 и x_4^2 определяются формулами (1.9). Пусть $\chi_j, j = \overline{1,4}$ являются корнями уравнения (2.3) с отрицательными действительными частями и $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j = \overline{1,4}$ являются решениями системы (2.1) вида (1.5) при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,4}$ соответственно.

Решение задачи (2.1), (1.4) представим в виде (1.11). Аналогичным образом, как в общем случае, доказывается, что уравнение

$$M_1(\eta,\varepsilon) = \left|m_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} = 0 \tag{2.4}$$

является дисперсионным уравнением задачи (2.1), (1.4), где $m_{ij}, i, j = \overline{1,4}$ определяются формулами (1.16) с той разницей, что в этом случае χ_j, $j = \overline{1,4}$ являются корнями уравнения (2.3) с отрицательными действительными частями, а

$$\begin{gathered} d_0 = -(2-\sigma), \, d_1 = 1 + 2\sigma - \sigma\varepsilon^2(2+\sigma)/m^2, \, d_2 = -\sigma(1-\varepsilon^2/m^2), \, d_3 = 1-\sigma^2 \\ d_4 = 0, \;\; d_5 = -8a^2 + 2(1+\sigma)/m^2 + 4a^2\varepsilon^2(2+\sigma)/m^2, \, d_6 = 4a^2 - 4a^2\varepsilon^2/m^2 \\ d_7 = \sigma - 4, \;\; d_8 = 5 - 2\sigma - (4-\sigma^2)\varepsilon^2/m^2, \;\; d_9 = (2-\sigma)(\varepsilon^2/m^2 - 1) \end{gathered} \tag{2.5}$$

При $\eta \neq 0, \, 0 < \varepsilon/m << 1, \, \chi^2 -$ корни уравнения (2.3) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \chi_1^2 = 1 + \alpha\varepsilon/m + \beta(\varepsilon/m)^2 + ..., \qquad \chi_2^2 = 1 - \alpha\varepsilon/m + \beta(\varepsilon/m)^2 + ... \\ \chi_3^2 = x_3^2 + \alpha_3(\varepsilon/m)^2 + ..., \qquad \chi_4^2 = x_4^2 + \alpha_4(\varepsilon/m)^2 + ... \end{gathered} \tag{2.6}$$

В (2.6) x_3^2 и x_4^2 определяются формулами (1.9), а

$$\begin{gathered} \alpha = \left(2(1+\sigma)\right)^{1/2}/(m\eta), \, \alpha_3 = (1+\sigma)x_3^4/(m^2\eta^3 A) \\ \beta = \alpha^2, \, \alpha_4 = -(1+\sigma)x_4^2/(m^2\eta^3 A) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Используя выражение (2.6), уравнение (2.4) можно написать в виде

$$\begin{gathered} M_1(\eta,\varepsilon) = 2(1-\sigma^2)(1+\sigma)m^{-2}(x_3+1)^2(x_4+1)^2 \times \\ \times \left\{x_3^2 x_4^2 + 2(1-\sigma)x_3 x_4 - \sigma^2 + 0(\varepsilon/m)\right\} = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что при малых ε/m корни уравнения (2.4) можно аппроксимировать корнями уравнения (1.22).

3. Преимущественно тангенциальные колебания. Пренебрегая нормальной силой инерции, два первых уравнения системы (1.1) сохраняются, а в третьем уравнении исчезает слагаемое $\lambda\Gamma u_3$. Решение системы (1.1) с учетом изменений ищем в виде (1.5). Тогда формулы (1.7) сохраняются, а характеристическое уравнение (1.8) принимает вид

$$(\chi^2-1)^2\prod_{j=1}^{2}(\chi^2-x_j^2)+m^{-2}\varepsilon^2A^2\left(2(1+\sigma)\chi^4+(3+2\sigma)\eta^2\chi^2-\eta^2x_1^2\right)=0 \quad (3.1)$$

где x_1^2 и x_2^2 определяются формулами (1.9). Аналогичным образом, как в общем случае, доказывается что уравнение

$$M_2(\eta,\varepsilon)=\left|m_{ij}\right|_{i,j=1}^{4}=0 \quad (3.2)$$

являются дисперсионным уравнением рассматриваемой задачи, где $m_{ij}, i,j=\overline{1,4}$ определяются формулами (1.16) с той разницей, что в этом случае $\chi_i, j=\overline{1,4}$ являются корнями уравнения (3.1) с отрицательными действительными частями.

При $\eta\neq 0, 0<\varepsilon/m<<1$, χ^2 -корни уравнения (3.1) представляются в виде

$$\begin{aligned}&\chi_1^2=x_1^2+\alpha_1(\varepsilon/m)^2+\cdots,\quad \chi_2^2=x_2^2+\alpha_2(\varepsilon/m)^2+\cdots\\&\chi_3^2=1+\alpha_3(\varepsilon/m)\ +\cdots,\quad \chi_4^2=1+\alpha_4(\varepsilon/m)\ +\cdots\end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned}&a_1=2A^2\left[2(1+\sigma)x_1^4+(3+2\sigma)\eta^2x_1^2+\eta^4-\eta^2\right]/\left[m^2(1+\sigma)\eta^6\right]\\&a_2=-8A^2\left[2(1+\sigma)x_2^4+(3+2\sigma)\eta^2x_2^2+\eta^4-\eta^2\right]/\left[m^2(1+\sigma)\eta^6\right]\\&a_3^2=-2A\left[2(1+\sigma)(1+\eta^2)+\eta^4\right]/\left[m^2(1-\sigma)\eta^4\right],\quad \alpha_4=\overline{\alpha_3}\end{aligned} \quad (3.4)$$

Используя выражения (3.3) , уравнение (3.2) запишется в виде

$$\begin{aligned}&M_2(\eta,\varepsilon)=0.5(1-\sigma^2)(1-\sigma)(3+\sigma)m^{-2}(2+\sigma\eta^2)(x_1+1)^2(x_2+1)^2x_1\times\\&\times\left\{x_1\left[2(1+\sigma)-\eta^2\right]-x_2\eta^2+O(\varepsilon/m)\right\}=0\end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что при малых ε/m корни уравнения (3.2) можно аппроксимировать корнями уравнения (1.23).

В табл. 1, 2, 3 приведены значения безразмерной характеристики фазовой скорости η в зависимости от m и ε при $\sigma=1/3$, $a^2=1/4800$ соответственно для общего случая: (1.17), преимущественно изгибного колебания: (2.4) и преимущественно тангенциального колебания: (3.2).

Численные расчеты подтверждают тот факт, что в общем случае при любом ε и для всех m, больше некоторого m_0, существуют волны рэлеевского типа и для конечного множества чисел m (число элементов множества зависит от величины a^2) возможно появление волн изгибного типа.

С увеличением m или с уменьшением ε фазовые скорости, порожденные планарными и изгибными колебаниями цилиндра, хорошо аппроксимируются фазовыми скоростями, порожденными соответственно планарными (ПЛ) и изгибными (ИЗ) колебаниями пластинки.

Таблица 1

m	η			
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon^2 = 1/50$	$\varepsilon^2 = 1/20$	$\varepsilon^2 = 1/10$
1	пл. 0.9194	-	-	-
	из. 0.0249	0.0247	0.0244	-
2	пл. 0.9194	0.9208	-	-
	из. 0.0498	0.0496	0.0496	0.0493
3	пл. 0.9194	0.9200	0.9210	-
	из. 0.0748	0.0748	0.0746	0.0744
4	пл. 0.9194	0.9198	0.9203	0.9213
	из. 0.0997	0.0996	0.0995	0.0994
5	пл. 0.9194	0.9196	0.9200	0.9207
	из. 0.1246	0.1246	0.1245	0.1244
6	пл. 0.9194	0.9199	0.9199	0.9203
	из. 0.1495	0.1495	0.1494	0.1493
7	пл. 0.9194	0.9195	0.9197	0.9201
	из. 0.1745	0.1744	0.1744	0.1743
8	пл. 0.9194	0.9195	0.9197	0.9200
	из. 0.1994	0.1993	0.1993	0.1992
9	пл. 0.9194	0.9195	0.9197	0.9199
	из. 0.2243	0.2243	0.2242	0.2242
10	пл. 0.9194	0.9195	0.9197	0.9199
	из. 0.2492	0.2492	0.2492	0.2492

Таблица 2

m	η				
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon^2 = 1/50$	$\varepsilon^2 = 1/20$	$\varepsilon^2 = 1/10$	$\varepsilon = 1$
1	0.0249	0.0250	0.0250	0.0250	0.0250
2	0.0498	0.0499	0.0499	0.0499	0.0499
3	0.0748	0.0748	0.0748	0.0748	0.0748
4	0.0997	0.0997	0.0997	0.0997	0.0997
5	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246
6	0.1495	0.1495	0.1495	0.1495	0.1495
7	0.1745	0.1744	0.1744	0.1744	0.1744
8	0.1994	0.1994	0.1994	0.1994	0.1994
9	0.2243	0.2243	0.2243	0.2243	0.2244
10	0.2492	0.2492	0.2492	0.2492	0.2492

Таблица 3

m	η				
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon^2 = 1/50$	$\varepsilon^2 = 1/20$	$\varepsilon^2 = 1/10$	$\varepsilon = 1$
1	0.9194	-	-	-	-
2	- -	0.6390	0.4303	0.3097	0.0994
3	- -	0.8710	0.7822	0.6413	0.2219
4	- -	0.9052	0.8818	0.8375	0.3868
5	- -	0.9137	0.9047	0.8888	0.5771
6	- -	0.9166	0.9124	0.9050	0.7399
7	- -	0.9179	0.9156	0.9117	0.8279
8	- -	0.9184	0.9172	0.9164	0.8684
9	- -	0.9188	0.9181	0.9168	0.8883
10	- -	0.9190	0.9186	0.9174	0.8990

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне "рэлеевского" типа.-Акуст. ж., 1960, т.6, вып. I, с.124-126.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки.-ПМ, 1994, т. 30, № 2 , с. 61-68.
3. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке. В сб.: Волновые задачи механики, Нижний Новгород , 1992, с. 87-93.
4. Белубекян М.В., Гулгазарян Г.Р., Саакян А.В. Волны типа Рэлея в полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочке.-Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т. 50, № 3-4, с. 49-55.
5. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик М.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. -М.: Наука, 1979, 383с.
6. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки.-Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, № 1, с. 61-70.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.: Наука, 1975. 575с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
07.05.1999