



выражаются через функцию напряжений  $F(x, y)$  формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

где  $F(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению [5]

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{26}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\beta_{ij}$  — приведенные коэффициенты, которые выражаются через упругие константы

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3} a_{j3}}{a_{33}} \quad (i = 1, 2, 6) \quad (1.3)$$

На краях клина при первой основной задаче теории упругости имеются следующие граничные условия для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin \alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos \alpha \right]_{y=kx} = f_1, & \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} = f_3 \\ \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos \alpha \right]_{y=kx} = f_2, & \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{y=0} = f_4 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — заданные функции, а  $k$  — угловой коэффициент грани клина в выбранной системе координат.

Функцию  $F(x, y)$  можно представить в виде [5]

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^4 F_i(x + \lambda_i y) \quad (1.5)$$

где  $F_i(x + \lambda_i y)$  — произвольные функции, а  $\lambda_i$  — простые корни уравнения

$$\lambda^4 - 2\beta'_{26} \lambda^3 + (2\beta'_{12} + \beta'_{66}) \lambda^2 - 2\beta'_{16} \lambda + \beta'_{11} = 0, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij} / \beta_{22} \quad (1.6)$$

Удовлетворяя условиям (1.4), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 [\lambda_i^2 \sin \alpha + \lambda_i \cos \alpha] F_i''(x + \lambda_i kx) &= -f_1(x) \\ \sum_{i=1}^4 [\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha] F_i''(x + \lambda_i kx) &= f_2(x) \\ \sum_{i=1}^4 \lambda_i F_i''(x) &= f_3(x), \quad \sum_{i=1}^4 F_i''(x) = f_4(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $F_i''(u) = d^2 F / du^2$ .

Применяя к уравнениям (1.7) и формулам (1.1) преобразование Меллина, получим

$$\sum_{i=1}^4 [\lambda_i^2 \sin \alpha + \lambda_i \cos \alpha] \int_0^{\infty} F_i''(x + \lambda_i kx) x^{s-1} dx = -\bar{f}_1(s)$$

$$\sum_{i=1}^4 [\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha] \int_0^{\infty} F_i''(x + \lambda_i kx) x^{s-1} dx = \bar{f}_2(s) \quad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i \bar{F}_i''(s) = \bar{f}_3(s), \quad \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i''(s) = \bar{f}_4(s)$$

Здесь

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad (1.9)$$

Если предположить, что напряжения при  $r \rightarrow \infty$ , ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) стремятся к нулю быстрее, чем  $r^{-1}$ , а при  $r \rightarrow 0$  возрастают не быстрее, чем  $r^{-1}$ , сходимость интегралов типа (9) обеспечивается, когда  $s$  меняется в полосе

$$\varepsilon < \operatorname{Re} s < 1 \quad (A)$$

где  $0 < \varepsilon < 1$ .

Интегралы, входящие в первые два уравнения системы (1.8), на основе теоремы Коши и с учетом принятых предположений относительно порядка напряжений в бесконечности и в вершине клина можно привести к виду [3]

$$\int_0^{\infty} F_i''(x + \lambda_i kx) x^{s-1} dx = (1 + \lambda_i k)^{-(1+\lambda_i k)s} \int_0^{(1+\lambda_i k)s} F_i''(u) u^{s-1} du =$$

$$= (1 + \lambda_i k)^{-s} \int_0^{\infty} F_i''(x) x^{s-1} dx = (1 + \lambda_i k)^{-s} \bar{F}_i''(s)$$

Система уравнений (1.8) после преобразования примет вид

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i [\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha]^{1-s} \cos^s \alpha \bar{F}_i''(s) = -\bar{f}_1(s)$$

$$\sum_{i=1}^4 [\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha]^{1-s} \cos^s \alpha \bar{F}_i''(s) = \bar{f}_2(s) \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i \bar{F}_i''(s) = \bar{f}_3(s), \quad \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i''(s) = \bar{f}_4(s)$$

Решение системы (1.10) имеет вид

$$\bar{F}_i''(s) = \Delta_i / \Delta \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.11)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_2 a_2 & \lambda_3 a_3 & \lambda_4 a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{— основной определитель системы (1.10),}$$

$$a_i = (\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \lambda_i k)^{-1}$$

Представляя простые корни  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) уравнения (1.6) в виде [5]

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\delta, \quad \lambda_{3,4} = \nu \pm i\gamma$$

для  $\Delta$  после некоторых преобразований получаем выражение

$$\Delta = 4(R_1 R_2)^{-2p} \cos^{2p+2} \alpha \left\{ (R_1 R_2)^p \left[ (\mu - \nu)^2 + (\delta^2 + \gamma^2) \right] \sin p\varphi_1 \sin p\varphi_2 + \right. \\ \left. + 2\gamma\delta \cos p\varphi_1 \cos p\varphi_2 \right\} - \gamma\delta (R_1^{2p} + R_2^{2p}) \quad (1.12)$$

где

$$R_1^2 = (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + \delta^2 \sin^2 \alpha, \quad R_2^2 = (\nu \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + \gamma^2 \sin^2 \alpha \quad (1.13)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\delta \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\gamma \sin \alpha}{\cos \alpha + \nu \sin \alpha}, \quad p = s - 1$$

Применив к формулам (1.1) преобразование Меллина, для изображений на линии  $y = \beta x$  получим выражения

$$\bar{\sigma}_x(s, \beta) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 (1 + \beta \lambda_i)^{-1} \bar{F}_i^*(s), \quad \bar{\sigma}_y(s, \beta) = \sum_{i=1}^4 (1 + \beta \lambda_i)^{-1} \bar{F}_i^*(s) \quad (1.14)$$

$$\bar{\tau}_{xy}(s, \beta) = - \sum_{i=1}^4 \lambda_i (1 + \beta \lambda_i)^{-1} \bar{F}_i^*(s)$$

Подставляя  $\bar{F}_i^*(s)$  из (1.10) в (1.14) и применяя обратное преобразование Меллина, получим

$$\sigma_x(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 (x + \lambda_i y)^{-1} \frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)} ds \\ \sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \sum_{i=1}^4 (x + \lambda_i y)^{-1} \frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)} ds \quad (1.15) \\ \tau_{xy}(x, y) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \sum_{i=1}^4 \lambda_i (x + \lambda_i y)^{-1} \frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)} ds$$

где за путь интегрирования ( $L$ ) можно принять прямую, параллельную мнимой оси комплексной переменной  $s$  и находящуюся внутри полосы (A) правее первого полюса подынтегральной функции.

Как видно из формул (1.15), напряжения в вершине клина имеют особенности, если трансцендентное уравнение  $\Delta(s) = 0$  имеет корни в полосе (A). Порядок особенности определяется корнем уравнения  $\Delta(s) = 0$ , имеющим наибольшую действительную часть в полосе (A).

2. Рассмотрим частные случаи. Если корни уравнения (1.16) имеют вид [3]

$$\lambda_{1,2} = \pm i\chi; \quad \lambda_{3,4} = \pm i\chi^{-1}; \quad \alpha = \pi/2$$

где  $\chi$  — действительное число, не равное единице, трансцендентное уравнение  $\Delta(s) = 0$  будет иметь вид

$$\left[ (\chi - \chi^{-1}) \sin \frac{p\pi}{2} + (\chi^{1-s} - \chi^{s-1}) \right] \left[ (\chi - \chi^{-1}) \sin \frac{p\pi}{2} - (\chi^{1-s} - \chi^{s-1}) \right] = 0$$

Полученное уравнение соответствует общему случаю нагружения клина. Приведенное в работе [3] уравнение

$$(\chi - \chi^{-1}) \sin \frac{p\pi}{2} + \chi^{s-1} - \chi^{1-s} = 0$$

получено для случая симметричной нагрузки.

Если уравнение (1.6) имеет пару двукратных корней

$$\lambda_1 = \mu + i\delta, \quad \lambda_2 = \mu - i\delta$$

что соответствует некоторому частному случаю ортотропии, функция напряжений  $F(x, y)$  представится в виде

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^2 [F_i(x + \lambda_i y) + (x - \lambda_i y)G_i(x + \lambda_i y)]$$

Удовлетворив граничным условиям (1.4) и применив к ним преобразование Меллина, для изображений функций  $\bar{F}_i, \bar{G}_i$  ( $i=1,2$ ) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 [\lambda_i a_i \bar{F}_i''(s) - \lambda_i (c_i a_i s + 2\lambda_i d_i \sin \alpha) \bar{G}_i'(s)] &= -\bar{f}_1(s) \\ \sum_{i=1}^2 [a_i \bar{F}_i''(s) - (c_i a_i s - 2d_i \cos \alpha) \bar{G}_i'(s)] &= \bar{f}_2(s) \\ \sum_{i=1}^2 [\lambda_i a_i \bar{F}_i''(s) - \lambda_i s \bar{G}_i'(s)] &= \bar{f}_3(s) \\ \sum_{i=1}^2 [\bar{F}_i''(s) + (2-s) \bar{G}_i'(s)] &= \bar{f}_4(s) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$a_i = (\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha)^{-1} \cos^2 \alpha, \quad c_i = \frac{(\cos \alpha - \lambda_i \sin \alpha)}{\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$d_i = (\lambda_i \sin \alpha + \cos \alpha)^{-1} \cos^2 \alpha$$

Определитель системы (2.1) можно представить в виде

$$\Delta = 16R_1^{2-2s} (\mu^2 + \delta^2) \cos^{2s} \alpha [\sin^2 (s-1)\varphi - (s-1)^2 \sin^2 \varphi]$$

где

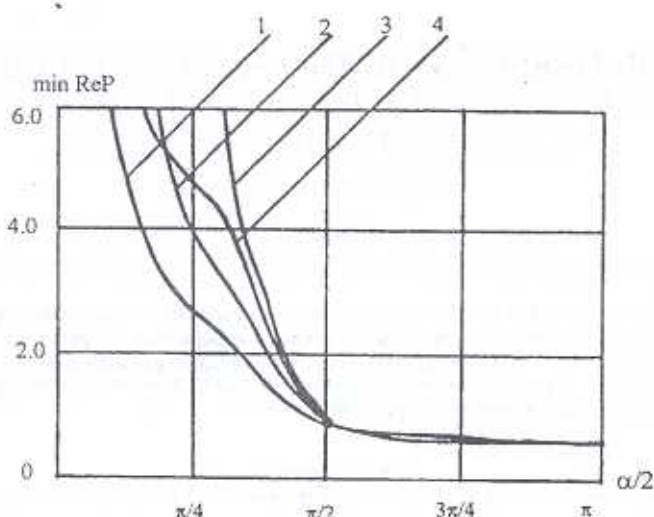
$$R_1^2 = (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2 + \delta^2 \sin^2 \alpha, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Уравнение  $\Delta(s) = 0$  в этом случае идентично уравнению, соответствующему изотропному клину [1,2] с углом раствора  $\varphi$ . В рассматриваемом случае напряжения в вершине клина не имеют особенностей при угле раствора  $\alpha \leq \pi$ , т.к. при этом  $\varphi \leq \pi$ .

При углах  $\alpha > \pi$  напряжения при вершине клина могут неограниченно возрастать, причем порядок особенности зависит от упругих постоянных материала клина, в отличие от соответствующей задачи для изотропного клина.

На фиг.2 приводятся графики изменения значений первого корня  $s$  уравнения  $\Delta(s) = 0$  в зависимости от угла раствора клина для некоторых

значений  $\mu$  и  $\delta$ . Кривая 1 соответствует изотропному случаю [1]; кривые 2,3,4 построены для случаев  $\mu = 0,5$  и  $\delta = 1$ ;  $\delta = 1$  и  $\mu = 2$ ;  $\delta = 2$  и  $\mu = 2$  соответственно.



Фиг.2

В случае  $\alpha = 2\pi$ , когда клин превращается в плоскость с разрезом, при простых корнях  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) трансцендентное уравнение (1.12) имеет вид

$$4[(\mu - \nu)^2 + (\delta - \gamma)^2] \sin^2 2\pi\rho = 0$$

из которого следует, что особенность напряжений в основании разреза имеет порядок  $1/2$ . Такой же порядок получается и для других типов анизотропии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.—J.Appl.Mech., 1952, 19.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.—М.-Л.: Изд.АН СССР, 1963.
3. Benthem J.P. On the stress in anisotropic infinite wedges.—Quarterly of applied mathematics, 1963, v.XXI, №3.
4. Геворкян С.Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела.—Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1968, т.ХХI, №4, с.30-39.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.—М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

Институт механики НАН Армении  
Ереванский политехнический университет

Поступила в редакцию  
25.01.2000