ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №2, 2000 Механика

УДК 539.3

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БАЛКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

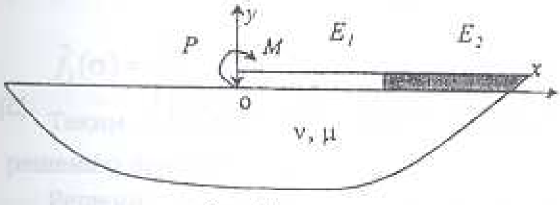
Агаян К.Л., Манукян Э.А.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Ա. Մանուկյան
Կիսահարթության եզրում դրված կտոր-առ-կտոր համասեռ հեծանի ծռումը
Դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության վրա կտոր-առ-կտոր համասեռ կիսաանվերջ հեծանի ծռման կոնտակտային խնդիրը: Ֆուրյեի ընդհանրացված ձևափոխության և ֆակտորիզացիայի մեթոդների հիման վրա, խնդրի լուծումը բերվում է կիսաանվերջ հեծանի վերջավոր մասի տակ գործող կոնտակտային նորմալ լարման նկատմամբ Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման:

K.L. Agayan, E.A. Manukyan
Bending of an piecewise constant semi-infinite beam, lying on the elastic half-plane

Рассматривается контактная задача о вдавливании полубесконечной кусочно-однородной балки на границу упругой полуплоскости. На основе методов обобщенного преобразования Фурье и факторизации решение задачи сводится к фредгольмовскому интегральному уравнению второго рода относительно контактных давлений на конечной части полубесконечной балки.

Контактные задачи о взаимодействии тонкостенных элементов в виде балок, плит и накладок с линейно-деформируемыми основаниями рассматривались во многих работах, достаточно полную библиографию которых можно найти в [1]. Впоследствии появились некоторые новые работы, которые по своей постановке и методу решения задач более близки к рассматриваемым здесь задачам. Отметим из них [2 – 5].



Фиг. 1

В настоящей работе рассматривается контактная задача о вдавливании полубесконечной кусочно-однородной балки на границу упругой полуплоскости. Задача решается при следующих двух основных предположениях:

а) под балкой возникают только нормальные контактные напряжения;

б) во время деформирования балка не отрывается от края полуплоскости.

Решение задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, относительно неизвестных контактных давлений, действующих под конечной частью кусочно-однородной полубесконечной балки, допускающее решение методом последовательных приближений.

Пусть кусочно-однородная полубесконечная балка с модулем упругости

$$E(x) = E_1\left[\theta(x) - \theta(x-a)\right] + E_2\theta(x-a)$$

где E_1, E_2 – постоянные, а $\theta(x)$ – функция Хевисайда, вдавливается на границу упругой полуплоскости с помощью силы P и момента M, приложенные на крае балки (фиг.1).

Дифференциальные уравнения равновесия отдельных частей кусочно-однородной балки запишутся в виде

$$D_1\frac{d^4\mathrm{v}}{dx^4}=q(x),\qquad 0<x<a$$
$$D_2\frac{d^4\mathrm{v}}{dx^4}=q(x),\qquad a<x<\infty \tag{1}$$

при граничных условиях

$$D_1\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\Big|_{x=0}=M,\qquad D_1\frac{d^3\mathrm{v}}{dx^3}\Big|_{x=0}=-P \tag{2}$$

и при условиях стыковки разнородных частей балки в точке $x=a$:

$$\mathrm{v}(a-0)=\mathrm{v}(a+0),\qquad \mathrm{v}'(a-0)=\mathrm{v}'(a+0)$$
$$D_1\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\Big|_{x=a-0}=D_2\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\Big|_{x=a+0},\quad D_1\frac{d^3\mathrm{v}}{dx^3}\Big|_{x=a-0}=D_2\frac{d^3\mathrm{v}}{dx^3}\Big|_{x=a+0} \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{v}(x)$ – вертикальные перемещения точек балки, $q(x)$ – интенсивность неизвестных нормальных контактных напряжений, возникающие под балкой. $D_1=E_1J_z$, $D_2=E_2J_z$, J_z – момент инерции относительно оси oz, перпендикулярной к плоскости xoy.

Введем функцию

$$V(x)=\left[\theta(x)-\theta(x-a)\right]\frac{d\mathrm{v}}{dx}+\theta(x-a)\frac{d\mathrm{v}}{dx} \tag{4}$$

Применив к (4) операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, с помощью условий (2) и (3), уравнения (1) можно заменить одним уравнением при $-\infty<x<\infty$ следующего вида:

$$\frac{d^3V}{dx^3}=\frac{q_1(x)}{D_1}+\frac{q_2(x)}{D_2}+\frac{X_0}{D_1}\delta''(x)+\frac{M_1}{D_1}\delta'(x)-\frac{P}{D_1}\delta(x)+X_1\delta'(x-a)+X_2\delta(x-a)$$

Здесь

$$q_1(x)=\left[\theta(x)-\theta(x-a)\right]q(x),\quad q_2(x)=\theta(x-a)q(x) \tag{5}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=a+0}-\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=a-0}=X_1$$

где $X_1=(D_2^{-1}-D_1^{-1})M_a$; M_a – изгибающий момент в точке $x=a$,

$$\frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=a+0}-\frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=a-0}=X_2$$

где $X_2=(D_2^{-1}-D_1^{-1})Q_a$; Q_a – перерезывающая сила в точке $x=a$,

$$X_0=\frac{dV}{dx}\Big|_{x=+0}$$

С другой стороны, для граничных точек полуплоскости имеем [6]

$$\frac{dv_1(x,0)}{dx} \equiv V_+^{(1)}(x) + V_-^{(1)}(x) = -\frac{1-\nu}{\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_+(s)}{s-x}ds \tag{6}$$

где $v_1(x,0)$ − вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости,

$$V_\pm^{(1)}(x) = \theta(\pm x)\frac{dv_1(x,0)}{dx}, \quad q_+(x) = [\theta(x) - \theta(x-a)]q(x) + \theta(x-a)q(x) \tag{7}$$

μ − модуль упругости, ν − коэффициент Пуассона материала упругой полуплоскости.

Условие контакта теперь запишется в виде

$$V(x) = V_+^{(1)}(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{8}$$

Применив к (5), (6) и (8) обобщенное преобразование Фурье, получим соответственно

$$i\sigma^3\overline{V}(\sigma) = \frac{\overline{q}_1(\sigma)}{D_1} + \frac{\overline{q}_2(\sigma)}{D_2} + X_2e^{i\sigma a} - i\sigma X_1e^{i\sigma a} - \frac{P}{D_1} - i\sigma\frac{M}{D_1} - \frac{X_0}{D_1}\sigma^2 \tag{9}$$

$$\frac{1-\nu}{\mu}i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\overline{q}_+(\sigma) = \overline{V}_+^{(1)}(\sigma) + \overline{V}_-^{(1)}(\sigma) \tag{10}$$

$$\overline{V}_+^{(1)}(\sigma) = \overline{V}(\sigma) \tag{11}$$

где $\overline{A}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x)e^{i\sigma x}dx, \quad -\infty < \sigma < \infty$.

Сопоставляя формулы (9), (10) и (11), после некоторых преобразований получим следующее функциональное уравнение

$$\left(\lambda_1^3 + |\sigma|^3\right)\overline{q}_+(\sigma) + \left(\lambda_1^3 - \lambda_2^3\right)\overline{q}_1(\sigma) = \overline{f}(\sigma) - \frac{\mu}{1-\nu}i\sigma^3\overline{V}_-^{(1)}(\sigma) \tag{12}$$

где

$$\overline{f}(\sigma) = \overline{f}_1(\sigma) + \overline{f}_2(\sigma), \quad \lambda_j^3 = \frac{\mu}{1-\nu}D_j^{-1} \quad (j = 1,2)$$

$$\overline{f}_1(\sigma) = \frac{\mu}{1-\nu}e^{i\sigma a}\left(i\sigma X_1 - X_2\right), \quad \overline{f}_2(\sigma) = i\sigma M\lambda_1^3 + \sigma^2\lambda_1^3X_0 + \lambda_1^3P \tag{13}$$

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению функционального уравнения (12) относительно $\overline{q}_+(\sigma)$ и $\overline{V}_-^{(1)}(\sigma)$.

Решение уравнения (12) построим методом факторизации [3,7]. Для этого напомним, что $\overline{q}_+(\sigma)$ и $\overline{V}_-^{(1)}(\sigma)$ являются преобразованиями Фурье соответственно $q_+(x)$ и $V_-^{(1)}(x)$, где $q_+(x)$ равняется нулю при $x < 0$, а $V_-^{(1)}(x)$ − при $x > 0$. В дальнейшем, функции, обладающие свойством функции $q_+(x)$, будем называть плюс-функциями и обозначим индексом "+", как $q_+(x)$, а функции типа $V_-^{(1)}(x)$ будем называть минус-функциями и обозначим индексом "−", как $V_-^{(1)}(x)$.

Приступим к исследованию уравнения (12). Для этого, как в работе [5], факторизуем $\left(\lambda_2^3 + |\sigma|^3\right)$, представляя ее в виде

$$\left(\lambda_2^3+|\sigma|^3\right)=\overline{K}_+(\sigma)\overline{K}_-(\sigma) \tag{14}$$

где

$$\overline{K}_+(\sigma)=(\sigma+i0)^{3/2}\,\overline{G}_+(\sigma),\quad \overline{K}_-(\sigma)=(\sigma-i0)^{3/2}\,\overline{G}_-(\sigma)$$

$$\overline{G}_\pm(\sigma)=\exp\left[\overline{\psi}_\pm(\sigma)\right],\quad \overline{\psi}_\pm(\sigma)=\int_0^\infty \psi(x)e^{\pm i\sigma x}dx,\ \psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_2^3}{|\sigma|^3}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

$$(\sigma\pm i0)^{3/2}=\sigma_+^{3/2}\mp i\sigma_-^{3/2},\quad \sigma_\pm^{3/2}=\theta(\pm\sigma)|\sigma|^{3/2} \tag{15}$$

Заметим, что $\overline{K}_+(\sigma)$ и $\left[\overline{K}_+(\sigma)\right]^{-1}$ являются преобразованием Фурье плюс-функции, а $\left[\overline{K}_-(\sigma)\right]^{-1}$ – минус-функции в смысле вышесказанного. Это следует из того, что $\overline{K}_\pm(\sigma)$ при $\sigma\to\infty$ имеют степенные поведения.

Подставив (14) в (12), после некоторых преобразований получим

$$\overline{K}_+(\sigma)\overline{q}_+(\sigma)=(\lambda_2^3-\lambda_1^3)\overline{\Phi}^{(1)}(\sigma)+\overline{\Phi}^{(2)}(\sigma)-\frac{\mu}{1-\nu}i\sigma^3\frac{\overline{V}_-^{(1)}(\sigma)}{\overline{K}_-(\sigma)}+\bar{f}_2(\sigma)\left[\overline{K}_-(\sigma)\right]^{-1} \tag{16}$$

где $\overline{\Phi}^{(1)}(\sigma)=\bar{q}_1(\sigma)/\overline{K}_-(\sigma)$, $\quad\overline{\Phi}^{(2)}(\sigma)=\bar{f}_1(\sigma)/\overline{K}_-(\sigma)$,

а $\bar{f}_1(\sigma)$, $\bar{f}_2(\sigma)$ даются формулами (13).

Представляя теперь $\overline{\Phi}^{(k)}(\sigma)$ в виде

$$\overline{\Phi}^{(k)}(\sigma)=\overline{\Phi}_+^{(k)}(\sigma)+\overline{\Phi}_-^{(k)}(\sigma),\qquad (k=1,2)$$

где

$$\overline{\Phi}_+^{(k)}(\sigma)=\int_0^\infty\Phi_k(x)e^{i\sigma x}dx,\quad \overline{\Phi}_-^{(k)}(\sigma)=\int_{-\infty}^0\Phi_k(x)e^{i\sigma x}dx$$

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{q}_1(\sigma)}{\overline{K}_-(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma,\quad \Phi_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}_1(\sigma)}{\overline{K}_-(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma$$

уравнение (16) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\overline{F}_+(\sigma)&=\overline{K}_+(\sigma)\bar{q}_+(\sigma)-\left(\lambda_2^3-\lambda_1^3\right)\overline{\Phi}_+^{(1)}(\sigma)-\overline{\Phi}_+^{(2)}(\sigma)=\\&=\left(\lambda_2^3-\lambda_1^3\right)\overline{\Phi}_-^{(1)}(\sigma)+\overline{\Phi}_-^{(2)}(\sigma)+\frac{\bar{f}_2(\sigma)}{\overline{K}_-(\sigma)}-\frac{\mu}{1-\nu}i\sigma^3\frac{\overline{V}_-^{(1)}(\sigma)}{\overline{K}_-(\sigma)}=\overline{F}_-(\sigma)\end{aligned} \tag{17}$$

Легко видеть [7], что $\overline{F}_+(\sigma)$ и $\overline{F}_-(\sigma)$ являются соответственно преобразованием Фурье плюс-функции $F_+(x)$ и минус-функции $F_-(x)$, при этом, как следует из (17), $F_+(x)=F_-(x)$, которое указывает, что $F_+(x)$ и $F_-(x)$ являются обобщенными функциями, сосредоточенными в нуле. Следовательно [8], их можно представить в виде

$$F_+(x)=F_-(x)=\sum_{k=0}^n\tilde{a}_k\delta^{(k)}(x) \tag{18}$$

где $\delta^{(k)}(x)-k$-ое производное δ-функции, а n – любое конечное натуральное число.

Применив преобразование Фурье к (18), получим

$$F_+(\sigma)=F_-(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}a_k\sigma^k \tag{19}$$

С другой стороны, известно [2,5], что $q_+(x)\sim 1/\sqrt{x}$ при $x\to +0$, а $V_-^{(1)}(x)\sim 1/\sqrt{-x}$ при $x\to -0$. А это, в свою очередь, означает, что

$$\overline{q}_+(\sigma)\sim(\sigma+i0)^{-1/2},\quad \overline{V}_-^{(1)}(\sigma)\sim(\sigma-i0)^{-1/2} \text{ при } |\sigma|\to\infty$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что при $|\sigma|\to\infty$ $\overline{K}_\pm(\sigma)\sim(\sigma\pm i0)^{3/2}$, $\overline{\Phi}_\pm^{(2)}(\sigma)$ ограничена, а $\overline{\Phi}_\pm^{(1)}(\sigma)$ стремится к нулю. Учитывая эти асимптотики из (17) и (19), получим

$$\overline{F}_+(\sigma)=\overline{F}_-(\sigma)=a_0+a_1\sigma \tag{20}$$

Подставляя (20) в (17), получим

$$\overline{q}_+(\sigma)=\left(\lambda_2^3-\lambda_1^3\right)\frac{\overline{\Phi}_+^{(1)}(\sigma)}{\overline{K}_+(\sigma)}+\frac{\overline{\Phi}_+^{(2)}(\sigma)}{\overline{K}_+(\sigma)}+\frac{a_0+a_1\sigma}{\overline{K}_+(\sigma)}$$

или

$$q_+(x)=\left(\lambda_2^3-\lambda_1^3\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\Phi}_+^{(1)}(\sigma)}{\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma+\varphi_+^{(2)}(x)+\varphi_0(x),\ (-\infty<x<\infty) \tag{21}$$

где

$$\varphi_+^{(2)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\Phi}_+^{(2)}(\sigma)}{\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma,\ \varphi_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_0+a_1\sigma}{\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma,\ (-\infty<x<\infty) \tag{22}$$

Далее, имея в виду теорему о свертке, получим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\Phi}_+^{(1)}(\sigma)}{\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma=\int_0^{\infty}R_+(x-s)\Phi_+^{(1)}(s)ds$$

где

$$\Phi_+^{(1)}(s)=\int_0^a R_-(s-t)q(t)dt,\ R_+(u)=R(u_+)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma u}d\sigma$$

$$R_-(u)=\overline{R(u_-)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{K}_-(\sigma)}e^{-i\sigma u}d\sigma$$

или же

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\Phi}_+(\sigma)}{\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma=\int_0^a L(x,t)q(t)dt$$

где

$$L(x,t)=\int_0^a R_+(x-s)R_-(s-t)ds$$

Аналогично, с учетом (13) и (16), для $\varphi_+^{(2)}(x)$ получим

$$\varphi_+^{(2)}(x)=-\left(\lambda_2^3-\lambda_1^3\right)\left[Q_aL(x,a)+M_aL_1(x,a)\right] \tag{23}$$

где

$$L_1(x,a)=-R_+(x)R_-(-a)+dL(x,a)/dx$$

Тогда из (21) для $0<x<\infty$ получим

$$q(x) = \left(\lambda_2^3 - \lambda_1^3\right)\int_0^a L(x,t)q(t)dt = \varphi_+^{(2)}(x) + \varphi_0(x), \quad (0 < x < \infty) \tag{24}$$

Если теперь в (24) полагать, что $0 < x < a$, то получим относительно $q(x)$ интегральное уравнение, разрешающее задачу

$$q(x) = \left(\lambda_2^3 - \lambda_1^3\right)\int_0^a L(x,t)q(t)dt = \varphi_+^{(2)}(x) + \varphi_0(x), \quad (0 < x < a) \tag{25}$$

где $\varphi_+^{(2)}(x)$ и $\varphi_0(x)$ даются формулами (22) и (23)

Присоединив к уравнению (25) условия

$$M_a = M - \int_0^a xq(x)dx, \quad Q_a = P - \int_0^a q(x)dx$$

получим замкнутую систему уравнения для определения неизвестных $q(x), M_a$ и Q_a.

Отметим, что после определения $q(x)$ $(0 < x < a)$ остальные значения $q(x)$ $(a < x < \infty)$ определяются из (24). В частном случае, для однородной балки, т.е. при $\lambda_1 = \lambda_2$ из (22), (23) и (25) получим, что

$$q(x) = \varphi_0(x) = a_0 R_+(x) - ia_1 dR_+(x)/dx$$

которое точно совпадает с результатом работы [5]. Неизвестные постоянные a_0 и a_1 определяются из условий

$$\bar{q}_+(0) = Q, \quad d\bar{q}_+(\sigma)/d\sigma\big|_{\sigma=+0} = iM$$

которые получаются из условия равновесия балки

$$\int_0^\infty q(x)dx = Q, \quad \int_0^\infty xq(x)dx = M$$

Уравнение (25) допускает решение методом последовательных приближений в пространстве суммируемых функций при

$$\left|\lambda_2^3 - \lambda_1^3\right| \max_t \int_0^a \left|L(x,t)\right|dx < 1$$

Приведем приближеное выражение для ядра $L(x,t)$. Для этого заметим, что при $0 < x < a$, $L(x,t)$ представляется в виде

$$L(x,t) = \begin{cases} \int_0^x R(x-s)\overline{R(t-s)}ds, & x < t \\ \int_0^t R(x-s)\overline{R(t-s)}ds, & x > t \end{cases}$$

Не вдаваясь в подробности, приведем выражение $\left[\overline{K}_+(\sigma)\right]^{-1}$ при $\sigma \to \infty$

$$\left[\overline{K}_+(\sigma)\right]^{-1} = \lambda_2^{-3/2}\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda_2}\right)^{-3/2} - \frac{2i}{\sqrt{3}}\lambda_2^{-3/2}\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda_2}\right)^{-5/2} - \frac{5}{3}\lambda_2^{3/2}\left(\frac{\sigma + i0}{\lambda_2}\right)^{-7/2} +$$

$$+O\left[\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda_2}\right)^{-9/2}\ln\frac{\sigma+i0}{\lambda_2}\right], \qquad |\sigma|>\lambda_2$$

Тогда, если учесть, что [9]

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda_2}\right)^{-3/2}\right]=\frac{\lambda_2\exp(-3i\pi/4)}{\Gamma(3/2)}(\lambda_2 x)_+^{1/2}$$

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda_2}\right)^{-5/2}\right]=\frac{\lambda_2\exp(-5i\pi/4)}{\Gamma(5/2)}(\lambda_2 x)_+^{3/2}$$

$$F^{-1}\left[\left(\frac{\sigma+i0}{\lambda_2}\right)^{-7/2}\right]=\frac{\lambda_2\exp(-7i\pi/4)}{\Gamma(7/2)}(\lambda_2 x)_+^{5/2}$$

$\Gamma(z)$ – известная гамма-функция, то для $R(x_+)$ получим

$$R(x_+)=\frac{e^{-3i\pi/4}}{\Gamma(3/2)}x_+^{1/2}-\frac{2\lambda_2 e^{-3i\pi/4}}{\sqrt{3}\Gamma(5/2)}x_+^{3/2}+\frac{5\lambda^{3/2}e^{-3i\pi/4}}{3\Gamma(7/2)}x_+^{5/2}+$$

$$+O\left[x_+^{7/2}(1+\ln x_+)\right] \text{ при } x\to+0, \quad R_-(x)=\overline{R(x_-)} \tag{26}$$

Отметим, что при получении (26) имелась в виду непрерывность $R_+(x)$ в точке $x=0$, т.е. $R_+(0)=R(0)=0$. Это следует из того, что $1/\overline{K}_+(\sigma)$ имеет порядок $(\sigma+i0)^{-3/2}$ при $|\sigma|\to\infty$ и $R_+(x)$, как преобразование Фурье от суммируемой функции $1/\overline{K}_+(\sigma)$ непрерывна.

В заключение отметим, что контактные давления в точке $x=a$, как это следует из (23) и (25), непрерывны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976.
2. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. – ПММ, 1961, вып.1, т.25.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. – Уч.записки МГУ, ест.н., 1979, №3.
4. Григорян Э.Х. О контактной задаче для упругой полуплоскости, усиленной полубесконечной кусочно-однородной накладкой. – Межв.сб. научн.тр., Механика, Ереван, Изд.ЕГУ, 1982, №1.
5. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. – Изв.НАН РА, Механика, 1992, т.45, №1-2, с.11-26.
6. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1989.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банановом пространстве. – М.: Наука, 1971.
8. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.06.1999