

УДК 539.3; 62.50

ՕՆ ԱՄԱՐԱԿԱՆ ԴՎԻՋԵՆԻԻ ՕԴՈՒ ՄՈԴԵԼԻ ԼԵՏԱՏԵԼՆՈՒ
ԱՍՏՐՈՒՄԻ Ս ԱՍՏՐՈՒՄԻ ԷԼԵՄԵՆՏԱՄԻ

Այրապետյան Վ.Վ., Գուկասյան Ա.Ա.

Վ.Վ.Այրապետյան, Ա.Ա. Գուկասյան

Առածգալական էլեմենտներով բաղադրված մի մոդելի ղեկավարվող շարժման մասին

Աշխատանքում քննարկվում է առածգալական էլեմենտներով (տալերով) բաղադրված մի մոդելի նկարագրություն: Մալերի տեղափոխության փոքրության և կողմնորոշման համակարգի մասին որոշակի ենթադրությունների դեպքում ստացված են շարժման գծային և տալերի առածգալական առատանունների հավասարումները: Իերված է ղեկավարման մի կիրառական իրական սխեմա, որը հաշվի է առնում բաղադրված առածգալական հատկությունները:

V.V. Hayrapetyan, A.A. Ghukasyan

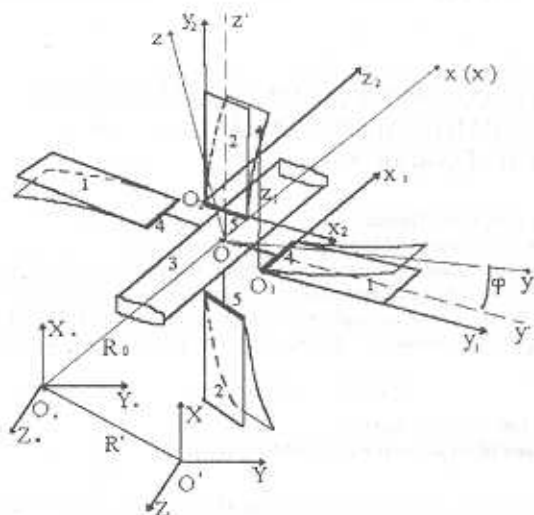
On controlled motion of one model of an aircraft with elastic elements

В работе приводится описание одной модели летательного аппарата (ЛА) с упругими элементами типа пластины. При некоторых предположениях относительно малости смещений пластины и системы ориентации получены линейные уравнения движения ЛА и уравнения упругих колебаний пластины. Приведена одна кибернетическая схема управления, учитывающая упругие свойства ЛА.

1.Описание кинематической модели ЛА. Рассматривается управляемое движение упругого летательного аппарата (ЛА) в центральном гравитационном поле Земли. ЛА представляет собой цилиндрическое, абсолютно твердое тело с закрепленными к нему упругими пластинами (фиг. 1). Пара пластин 1 перпендикулярна паре пластин 2. Края пластин жестко заделаны к абсолютно жестким стержням 4,5. Пластины однородные с толщиной h и размерами $(a \times b)$. Они характеризуются плотностью ρ , модулем Юнга E и жесткостью на изгиб D . Радиус центрального тела обозначим через q .

Введем инерциальную систему координат O, X, Y, Z , (фиг. 1). В зависимости от характера исследований в качестве системы O, X, Y, Z , можно выбрать также какую-либо квазиинерциальную систему координат, ускорение и угловая скорость которой считаются пренебрежимо малыми. Например, начало координат O , можно поместить в центре планеты, одну ось направить по оси вращения планеты, вторую и третью расположить в плоскости экватора. В другом случае одну ось совмещают с радиус-вектором перигея орбиты, вторую проводят по нормали к плоскости орбиты, а третью — параллельно трансверсали. В любом случае система O, X, Y, Z , предполагается невращающейся и равномерно-перемещающейся [1]. Здесь мы введем еще одну систему координат $O'XYZ$, положение которой известно относительно O, X, Y, Z , и в начале которой может находиться пункт наблюдения. Соответствующие оси систем O, X, Y, Z , и $O'XYZ$

параллельны. Для описания кинематики ЛА вводится также связанная прямоугольная система координат $Oxyz$, начало которой находится в центре масс ЛА, а ось Ox направлена вдоль продольной оси ЛА.



Фиг.1

Будем рассматривать поступательное движение ЛА вдоль оси Ox и вращение вокруг той же оси. Положение начала системы координат O, X, Y, Z , относительно $O'XYZ$ определим радиус-вектором R' , а положение центра масс ЛА относительно системы O, X, Y, Z , R_0 . Относительное положение точки тела в деформированном состоянии обозначим через вектор r . Абсолютное положение точек ЛА определяется вектором

$$R = R' + R_0 + r \quad (1.1)$$

Для исследования упругих колебаний пластин 1,2 введем

соответственно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$, начала которых в связанной системе известны (фиг.1). Ориентация связанной системы $Oxyz$ относительно $O'XYZ$ определяется тремя углами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, называемые самолетными углами [2]. Матрица перехода между системами $Oxyz$ и $O'XYZ$ в нашем случае имеет следующий вид:

	X	Y	Z
x	c_1c_3	$c_1s_3 + s_1s_2c_3$	$s_1s_3 - c_1s_2c_3$
y	$-c_2s_3$	$c_1c_3 - s_1s_2s_3$	$s_1c_3 - c_1s_2s_3$
z	s_2	$-s_1c_2$	c_1c_2

где $\sin \theta_k = s_k$, $\cos \theta_k = c_k$, $k = 1, 2, 3$.

Для определения вращения ЛА введем жестко связанную с ЛА систему координат $Ox'y'z'$. Ось совпадает с осью Ox , ось Oy' находится в плоскости недеформированных пластин 1, ось Oz' — в плоскости недеформированных пластин 2. Вращение ЛА определится углом φ (фиг.1).

Обозначая радиус-вектор произвольной точки пластины 1 через r_1 , а точки пластины 2 через r_2 в системе $Oxyz$, имеем

$$r_1 = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - b/2 \\ (q+l+y_1) \cos \varphi - w_1 \sin \varphi \\ (q+l+y_1) \sin \varphi + w_1 \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ (x_2 - b/2) \cos \varphi - (q + l + y_2) \sin \varphi \\ (x_2 - b/2) \sin \varphi + (q + l + y_2) \cos \varphi \end{pmatrix}$$

где $w_1 = w_1(t, x_1, y_1)$ и $w_2 = w_2(t, x_2, y_2)$ — упругие перемещения точек пластин в системах $O_1x_1y_1z_1$ и $O_2x_2y_2z_2$ соответственно, а l — длина жесткого стержня, соединяющего пластину с основным телом.

Для удобства элементы матрицы перехода между системами $O'XYZ$ и $Oxyz$ обозначим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_2c_3 & c_1s_3 + s_1s_2c_3 & s_1s_3 - c_1s_2c_3 \\ -c_2s_3 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & s_1c_3 - c_1s_2s_3 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

С учетом (1.2), (1.3) и предполагая, что радиус-вектор R_0 направлен по оси вращения ЛА, радиус-векторы точек пластин 1,2 соответственно (1.1) примут вид

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + a_{xx}R_0 + a_{xx}r_{ix} + a_{yx}r_{iy} + a_{zx}r_{iz} \\ Y + a_{xy}R_0 + a_{xy}r_{ix} + a_{yy}r_{iy} + a_{zy}r_{iz} \\ Z + a_{xz}R_0 + a_{xz}r_{ix} + a_{yz}r_{iy} + a_{zz}r_{iz} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

$\dot{\mathbf{R}}_i$, $i = 1, 2$ имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \begin{pmatrix} a_{xx}\dot{R}_0 + a_{xx}\dot{r}_{ix} + a_{yx}\dot{r}_{iy} + a_{zx}\dot{r}_{iz} \\ a_{xy}\dot{R}_0 + a_{xy}\dot{r}_{ix} + a_{yy}\dot{r}_{iy} + a_{zy}\dot{r}_{iz} \\ a_{xz}\dot{R}_0 + a_{xz}\dot{r}_{ix} + a_{yz}\dot{r}_{iy} + a_{zz}\dot{r}_{iz} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (1.5)$$

При вычислениях $\dot{\mathbf{R}}_i$, $i = 1, 2$ учитывается, что наблюдательный пункт неподвижен относительно системы $O.X.Y.Z.$, а $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = \text{const}$.

2. Вывод уравнений движения и колебаний пластин. Поступательное движение и вращение ЛА происходят за счет внешней силы F , направленной вдоль оси Ox и вращательного момента M , приложенной вокруг той же оси.

Кинетическая энергия движения ЛА имеет вид

$$T = \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_c}{2} \dot{R}_0^2 + \rho h \iint_{\Omega} \dot{\mathbf{R}}_1^2 d\Omega + \rho h \iint_{\Omega} \dot{\mathbf{R}}_2^2 d\Omega \quad (2.1)$$

где I — момент инерции основного тела 3 относительно оси Ox , $d\Omega$ — элемент площади срединной плоскости пластин, m_c — масса ЛА без пластин. Первое и второе слагаемые в (2.1) представляют собой кинетическую энергию вращательного и поступательного движений ЛА без пластин. Третий и четвертый слагаемые представляют кинетические энергии первой и второй пар пластин соответственно.

Потенциальная энергия ЛА состоит из потенциальных энергий упругой деформации [3] и гравитационных сил

$$U = D \sum_{i=1}^2 \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} - \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i \partial y_i} \right)^2 \right] \right\} d\Omega + mgR_0 \quad (2.2)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu)^2$, ν — коэффициент Пуассона.

Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости, где имеют место следующие предположения: упругое поперечное смещение пластин мало по сравнению с линейными размерами, а цилиндрическая жесткость на изгиб велика ($D \sim \epsilon^{-1}$, $w_i/\max(a,b) \sim \epsilon$ $i=1,2$, $\epsilon \ll 1$) [4]. Из этих предположений следует также, что $\dot{\varphi} \sim \epsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \epsilon$, $\ddot{R}_0 \sim \epsilon^{1/2}$, $\dot{R}_0 \sim \epsilon$.

Для получения уравнений движения ЛА и колебаний пластин воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского [2]

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T + A - U) dt = 0 \quad (2.3)$$

где δT — вариация кинетической энергии, δU — вариация потенциальной энергии, δA — элементарная работа внешней силы F и внешнего момента M на виртуальных перемещениях $\delta R_0, \delta \varphi$. t_1, t_2 — соответственно начальное и конечное время движения, причем $\delta \varphi = \delta w_1 = \delta w_2 = \delta R_0 = 0$ при $t = t_1, t_2$. В выражениях $\delta T, \delta U, \delta A$, оставляя члены, порядок которых не превышает ϵ , получим следующие уравнения движения ЛА и колебаний пластин:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F + 2a_R \ddot{\varphi} \sin \varphi + 2d_1 \rho h \ddot{\varphi} \cos \varphi \iint_{\Omega} (q + l + y_2) d\Omega - 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega -$$

$$- 2d_1 \rho h \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \iint_{\Omega} (q + l + y_2) d\Omega + 2a_R \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + 2d_1 \rho h \iint_{\Omega} \dot{w}_1 \sin \varphi d\Omega \quad (2.4)$$

$$I\ddot{\varphi} + 2a_{\varphi 1} \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi + 2a_{\varphi 2} \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - 2a_{\varphi 3} \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi - 2a_{\varphi 4} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi -$$

$$- a_{\varphi 5} \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi + 2d_2 \rho h \sin^2 \varphi \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega +$$

$$+ 2\rho h \cos^2 \varphi \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega - 2a_{\varphi 5} \ddot{R}_0 \sin \varphi - 2d_1 \rho h \ddot{R}_0 \cos \varphi \iint_{\Omega} (q + l + y_1) d\Omega -$$

$$- 2d_1 \rho h \sin \varphi \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 (x_2 - b/2) d\Omega - 2d_1 \rho h \cos \varphi \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 (q + l + y_2) d\Omega = M(t) \quad (2.5)$$

$$\ddot{w}_1 (d_2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_1 = -d_2 (q + l + y_1) \ddot{\varphi} \sin^2 \varphi - (q + l + y_1) \dot{\varphi} \cos^2 \varphi +$$

$$+ d_3 (q + l + y_1) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + d_1 \ddot{R}_0 (\sin \varphi - \cos \varphi) \quad (2.6)$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g + d_1 (q + l + y_2) \ddot{\varphi} \cos \varphi + d_1 (x_2 - b/2) \dot{\varphi} \sin \varphi -$$

$$- d_1 (q + l + y_2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + d_1 (x_2 - b/2) \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \quad (2.7)$$

с начальными и граничными условиями

$$R_0(t_0) = R_0, \dot{R}_0(t_0) = V_0, \varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 \quad (2.8)$$

$$w_i(t_0, x_i, y_i) = F_i^1(x_i, y_i), \dot{w}_i(t_0, x_i, y_i) = F_i^2(x_i, y_i) \quad i = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$w_i(t, x_i, y_i)|_{y_i=0} = 0, \left. \frac{\partial w_i(t, x_i, y_i)}{\partial y_i} \right|_{y_i=0} = 0, \left. \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right) \right|_{y_i=0} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^2 \partial y_i} \right]_{y_i=a} = 0, \left. \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} \right) \right|_{x_i=0} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^2 \partial x_i} \right]_{x_i=0} = 0; \quad (2.10)$$

$$\left. \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} \right) \right|_{x_i=b} = 0, \left[\frac{\partial^3 w_i}{\partial x_i^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_i}{\partial y_i^2 \partial x_i} \right]_{x_i=b} = 0; \quad i = 1, 2$$

где

$$d_1 = \sin 2\theta_3 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 - \sin 2\theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3,$$

$$d_2 = 1 - \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \sin \theta_2, \quad d_3 = 1 - d_2 = \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \sin \theta_2$$

$$a_R = d_1 \rho h \iint_{\Omega} (q+l+y_1+x_2-b/2) d\Omega$$

$$a_{\varphi_1} = d_2 \rho h \iint_{\Omega} [(q+l+y_1)^2 + (x_2-b/2)^2] d\Omega + \rho h \iint_{\Omega} (q+l+y_2)^2 d\Omega$$

$$a_{\varphi_2} = d_2 \rho h \iint_{\Omega} (q+l+y_2)^2 d\Omega + \rho h \iint_{\Omega} [(q+l+y_1)^2 + (x_2-b/2)^2] d\Omega$$

$$a_{\varphi_3} = 2d_3 \rho h \iint_{\Omega} (x_2-b/2)(q+l+y_2) d\Omega$$

$$a_{\varphi_4} = d_3 \rho h \iint_{\Omega} [(q+l+y_1)^2 + (x_2-b/2)^2 - (q+l+y_2)^2] d\Omega$$

$$a_{\varphi_5} = d_1 \rho h \iint_{\Omega} (x_2-b/2+q+l+y_1) d\Omega$$

В дальнейшем для аналитического исследования уравнений колебаний пластин, предполагается что ось O, X_* совпадает с осью вращения ЛА. При этом уравнения движения (2.4), (2.5) и уравнения колебаний пластин (2.6), (2.7) принимают следующий вид:

$$m\ddot{R}_0 = -mg + F - 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega \quad (2.11)$$

$$2\alpha_{\varphi_1} \ddot{\varphi} \rho h + 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q+l+y_1) d\Omega + I\ddot{\varphi} = M(t) \quad (2.12)$$

$$\ddot{w}_1 + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_1 = -\ddot{\varphi} (q+l+y_1) \quad (2.13)$$

$$\ddot{w}_2 + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_2 = -\ddot{R}_0 + g \quad (2.14)$$

3. Решение краевой задачи и учет упругости пластин в системе управления ЛА. Краевую задачу (2.13), (2.14), (2.9), (2.10) можно представить в виде

$$\ddot{w}_i + \frac{D}{\rho h} \Delta^2 w_i = \Phi_i, \quad i=1,2 \quad (3.1)$$

где $\Phi_1 = -\ddot{\phi}(q+l+y_1)$, $\Phi_2 = -\ddot{R}_0 + g$.

В (3.1) можно перейти к безразмерным переменным, введя единицу времени и длины соответственно по формулам $\theta = (D_0 / \rho_0 d)^{1/2}$, $d = (ab)^{1/2}$, где D_0 — единица измерения жесткости на изгиб, а ρ_0 — единица измерения плотности.

Решение уравнения (3.1) с заданной правой частью представим в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи [3]

$$w_i(t, x_i, y_i) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mni}(t) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) \quad (3.2)$$

Функции $X_{mi}(x_i)$, $Y_{ni}(y_i)$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок, которыми аппроксимируются пластины. $X_{mi}(x_i)$ — собственная форма колебаний свободной балки, а $Y_{ni}(y_i)$ — собственная форма колебаний балки, жестко заделанной на конце $y_i = 0$, и свободным на конце $y_i = a$.

Подставляя (3.2) в (3.1) и (2.9), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $w_{mni}(t)$

$$\ddot{w}_{mni}(t) + k_{mni}^2 w_{mni}(t) = \Phi_{mni}[t] \quad (3.3)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} w_{mni}(t_0) &= \iint_{\Omega} F_i^1(x_i, y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega = F_{mni}^1 \\ \dot{w}_{mni}(t_0) &= \iint_{\Omega} F_i^2(x_i, y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega = F_{mni}^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$k_{mni}^2 = \frac{D}{\rho h} \left[\lambda_n^4 + \mu_m^4 + 2 \iint_{\Omega} X_{mi}''(x_i) Y_{ni}''(y_i) X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega \right]$$

$$\Phi_{mni}[t] = \iint_{\Omega} \Phi_i X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) d\Omega \quad i=1,2$$

а λ_n, μ_m — собственные частоты балок. Решение уравнения (3.3) с начальными условиями (3.4) имеет вид

$$w_{mni}(t) = c_{mni}^1 \cos k_{mni} t + c_{mni}^2 \sin k_{mni} t + \frac{1}{k_{mni}} \int_{t_0}^t \Phi_{mni}[\tau] \sin k_{mni}(t-\tau) d\tau \quad (3.5)$$

где

$$c_{mni}^1 = F_{mni}^1 \cos k_{mni} t_0 + \frac{F_{mni}^2}{k_{mni}} \sin k_{mni} t_0, \quad c_{mni}^2 = F_{mni}^1 \sin k_{mni} t_0 + \frac{F_{mni}^2}{k_{mni}} \cos k_{mni} t_0$$

Следовательно, упругие колебания пластин ЛА во время движения определяются выражением

$$w_i(t, x_i, y_i) = \sum_{m,n=1}^{\infty} [c_{mni}^1 \cos k_{mni} t + c_{mni}^2 \sin k_{mni} t + \frac{1}{k_{mni}} \int_{t_0}^t \Phi_{mni}[\tau] \sin k_{mni} (t - \tau) d\tau] X_{mi}(x_i) Y_{ni}(y_i) \quad (3.6)$$

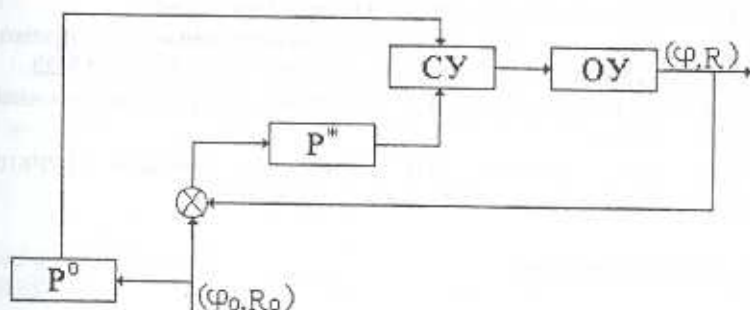
Выражение (3.6) используется при введении колебательного эффекта в систему управления ЛА, поскольку при управлении упругими ЛА появляются дополнительные отклонения от программного движения. Для коррекции программного движения ЛА необходимо в системе управления ввести дополнительный регулятор с обратной связью, который вырабатывает управляющие силы и моменты, в зависимости от упругих колебаний пластин. Эти силы и моменты в задачах кинематического управления в данном случае определяются из (2.11), (2.12) в виде

$$F^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_2 d\Omega$$

$$M^* = 2\rho h \iint_{\Omega} \ddot{w}_1 (q + l + y_1) d\Omega$$

где $\ddot{w}_i(t, x_i, y_i)$, $i=1,2$ определяются из (3.6).

На фиг.2 схематично представлена кибернетическая схема управления ЛА с упругими свойствами.



Фиг.2

P^0 — регулятор жесткой модели ЛА; P^* — регулятор, учитывающий упругий эффект ЛА; СУ — система управления; ОУ — объект управления

4. О сходимости полученных рядов. В уравнениях (3.1) Φ_i ($i=1,2$) являются обобщенными управляющими воздействиями из класса кусочно-непрерывных и ограниченных функций, коэффициенты Фурье которых имеют порядок $\frac{1}{m^{2+\alpha} n^{2+\alpha}}$, $\alpha > 0,5$, следовательно, левые части уравнений (3.1) тоже являются ограниченными функциями и должны принадлежать

классу L^2 . Мы должны показать, что ряды (3.6) и их смешанные производные четвертого порядка по x_i, y_i , а также вторая производная по t сходятся с квадратом. Как видно из (3.1), $w_i(t, x_i, y_i)$ четырежды дифференцируемы по x_i, y_i и дважды дифференцируемы по t . Так как левые части уравнений (3.1) принадлежат классу L^2 , то функции $F_i^1(x_i, y_i), F_i^2(x_i, y_i)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\partial^4 F_i^1 / \partial x_i^k \partial y_i^l \in L^2, \partial^4 F_i^2 / \partial x_i^k \partial y_i^l \in L^2, k, l = \overline{0, 4}; k + l = 4 \quad (4.1)$$

С другой стороны μ_m, λ_n зависят от m, n линейно [5]. Ряды коэффициентов Фурье функций (4.1) удовлетворяют неравенству Бесселя [6] и должны иметь порядок

$\frac{1}{m^{k+\alpha} n^{l+\alpha}}, \alpha > 0,5; k, l = \overline{0, 4}; k + l = 4$. Тогда

коэффициенты Фурье функций $F_i^1(x_i, y_i), F_i^2(x_i, y_i)$ будут иметь

порядок $\frac{1}{m^{4+\alpha} n^{4+\alpha}}$. Следовательно, коэффициенты c_{mi}^1, c_{mi}^2 (3.5) имеют

порядок $\frac{1}{m^{4+\alpha} n^{4+\alpha}}$, где $\alpha > 0,5$.

Таким образом, из постановки задачи следует, что ряды (3.6) и их производные по t, x_i, y_i сходятся с квадратом и их предельные функции принадлежат классу L^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. -М.:Машиностроение, 1987. 232с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. -М.:Наука, 1977. 736с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. -М.:Наука, 1968. 559с.
4. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. -Изв.АН Арм. ССР, Механика, 1990, №4, с.13-23.
5. Вибрации в технике. Под ред. В.В. Болотина. -М.:Машиностроение, т.1, 1978. 352с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.:Наука, 1968. 496с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
28.06.1999