ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика

УДК 531.36

# К ТЕОРИИ $K_{\Delta}^{\omega}$ УСТОЙЧИВОСТИ

Аванян В.Т.

Վ.Տ. Ավանյան

$K_{\Delta}^{\omega}$ - կայունության տեսության մասին

Դիտարկվում է $K_{\Delta}^{\omega}$ կայունություն [1]: Ապացուցվում է, որ հոլոնոմ ստացիոնար կապերով կոնսերվատիվ համակարգի մեկուսացված հավասարակշռության դիրքի կայունության համար, այդ դիրքում նրա պոտենցիալ էներգիայի մինիմում ունենալը բավական է: Ստացվել են նաև որոշ դեպքերի համար անկայունության բավարար պայմաններ:

Գծային համասեռ ոչ ստացիոնար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով նկարագրվող պրոցեսի համար ապացուցվել են ասիմպտոտիկ կայունության մասին երկու թեորեմներ: Իսկ երբ այդ համակարգը ա) բերվող է, ստացվել են կայունության և ասիմպտոտիկ կայունության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, բ) եռանկյունաձև է՝ ասիմպտոտիկ կայունության բավարար պայման, գ) $\omega$-պարբերական է՝ կայունության և ասիմպտոտիկ կայունության բավարար պայմաններ:

Նշված ուսումնասիրությունները կատարված են Լյապունովի երկրորդ եղանակով:

Այս խնդրի դրվածքով Լյապունովի ֆունկցիան ընդհանուր դեպքում Հերմիտյան ձև է, որի մատրիցի միջոցով, օգտվելով հիմնական լեմմից [2] կառուցվում է գրգռումների թույլատրելի շեղումների տիրույթը ժամանակի $[t_0,\infty)$ ինտերվալի համար: Այդ տիրույթը հանդիսանում է $\rho_{\omega}$- խողովակ, որի յուրաքանչյուր հատույթ $t=t^*$ հիպերհարթությամբ, $n$- չափանի էլիպսոիդ է որոշակի հատկություններով [1].

**V.T. Avanian**

**About the theory of $K_{\Delta}^{\omega}$ - stability**

Рассматривается $K_{\Delta}^{\omega}$ устойчивость [1]. Доказывается, что для устойчивости линейного приближения положения изолированного равновесия консервативной механической системы с голономными стационарными связями, достаточно, чтобы в этом положении ее потенциальная энергия имела строгий минимум. При некоторых случаях получены достаточные условия для неустойчивости.

Для нестационарных линейных систем однородных дифференциальных уравнений доказаны две теоремы об асимптотической устойчивости. Когда система а) приводимая, получены необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, б) треугольная: достаточное условие асимптотической устойчивости, в) $\omega$ – периодичная: достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости.

Исследование проведено вторым методом Ляпунова, где функция Ляпунова является, в общем случае, эрмитовой формой, через матрицы которого в силу леммы, доказанной в [2], строится область допустимых отклонений для возмущений на интервале времени $[t_0,\infty)$. Эта область является $\rho_{\omega}$- трубкой, каждое сечение которой гиперплоскостью $t=t^*$ представляет собой $n$ -мерный эллипсоид с определенными свойствами [1].

**1.** Допустим, что положение механической системы с голономными стационарными связями определяется $s$ независимыми координатами $q_1,\ldots,q_s$. В положении равновесия все обобщенные силы такой системы равны нулю.

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots\ Q_s = 0 \tag{1.1}$$

Для консервативных сил $Q_k = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k}$ $(k = 1, \ldots, s)$, где $\Pi$ – потенциальная энергия системы, поэтому уравнения (1.1) принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0 \tag{1.2}$$

Решая (1.2) относительно переменных $q_1, \ldots, q_s$, получаем те значения обобщенных координат, при которых механическая система находится в положении равновесия. Таких положений могут быть несколько, причем некоторые из них устойчивы, а остальные неустойчивы. Рассмотрим один из этих возможных положений равновесия (считается, что в этом положении потенциальная энергия системы равна нулю). Кроме того, не нарушая общности, можем предполагать, что в этом положении все обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$ равны нулю. Рассмотрим $K_\Delta^\omega$-устойчивость положения равновесия относительно обобщенных координат $q_1, \ldots, q_s$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s$.

Тогда уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial q_k}{\partial t} = \dot{q}_k \qquad (k = 1, \ldots, s) \tag{1.3}$$

будут уравнениями возмущенного движения, и они допускают интеграл энергии

$$T + \Pi = h \tag{1.4}$$

где $T$ – кинетическая энергия системы.

Попробуем доказать теорему Лагранжа в постановке $K_\Delta^\omega$ – устойчивости.

**Теорема.** Если в положении изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями потенциальная энергия $\Pi$ имеет строгий минимум, то линейное приближение $K_\Delta^\omega$ устойчиво.

**Доказательство.** Пусть в рассматриваемом положении равновесия потенциальная энергия равна нулю и имеет строгий минимум. Тогда квадратичное приближение функции $\Pi$ будет определенно-положительной формой относительно $q_1, \ldots, q_s$. С другой стороны, квадратичное приближение $T$-кинетической энергии в положении равновесия будет определенно-положительной формой относительно обобщенных скоростей. Таким образом, полная энергия

$$V = \Pi + T \tag{1.5}$$

будет определенно-положительной квадратичной формой относительно обобщенных координат и скоростей. Матрицу $M$ квадратичной формы $V$ разложим на множители следующим образом [2]:

$$M = \dot{H}^{-1} H^{-1} = \left(H H^*\right)^{-1}$$

где столбцы $H_1, \ldots, H_s$ матрицы $H$ имеют одинаковую норму:

$$\left\|H_j\right\| = \sqrt{\frac{1}{S} SpM^{-1}} = \upsilon \quad (j = 1,..S) \tag{1.7}$$

Матрицу $A = \upsilon M$ квадратичной формы $V_1 = \upsilon V$ можно записать в виде

$$A = \upsilon M = \left( \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} H \cdot \frac{1}{\sqrt{\upsilon}} H \right)^{-1}$$

где нормы столбцов матрицы $\frac{1}{\sqrt{\upsilon}} H$ равны единице. Функция $V_1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1 о $K_\Delta^\omega$-устойчивости [2], следовательно, теорема доказана.

Так как из $K_\Delta^\omega$-устойчивости всегда следует устойчивость по Ляпунову, но обратное имеет место не всегда [3], то легко утверждаются факты об обратимости теоремы Лагранжа из [4,5]:

а) если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия не имеет минимума и его отсутствие определяется членами второго порядка малости без необходимости рассматривания членов высшего порядка, то равновесие $K_\Delta^\omega$ неустойчиво [4];

б) если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия имеет максимум, определяемый по членам наименее высокого порядка, которые действительно имеются в разложении этой функции, то равновесие $K_\Delta^\omega$ неустойчиво [4];

в) если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия П предполагается аналитической функцией $q_1,...,q_s$, не имеет минимума, то равновесие $K_\Delta^\omega$ неустойчиво [5].

2.Рассмотрим $K_\Delta^\omega$ устойчивость линейной однородной нестационарной системы:

$$\dot{x} = A(t)x,\ A(t) \in C(a,\infty);\quad \sup_t \left\|A(t)\right\| < \infty \text{, с спектром}$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\},\quad (m \le n) \tag{2.1}$$

**Теорема 2.1.** Если наибольший характеристический показатель системы (2.1) отрицателен [4]

$$\alpha = \max_k \alpha_k < 0 \tag{2.2}$$

то тривиальное решение этой системы (невозмущенный процесс) асимптотически $K_\Delta^\omega$ устойчиво.

**Доказательство.** Пусть (2.2) имеет место, $G(t)$- произвольная матрица из класса $K_\Delta^\omega$, $\rho > 0$- произвольное достаточно малое число, кроме того, произвольное нетривиальное решение $x(t)$ системы (2.1) в начальный момент времени $t = a$ удовлетворяет условию

$$\left(G^{-1}(a)x(a),\ G^{-1}(a)x(a)\right) \le \rho^2 \tag{2.3}$$

Для эрмитовой формы

$$V(x)=\left(\dot{G}^{-1}(t)G^{-1}(t)x(t),x(t)\right)=(H(t)x,x);\quad \left(H(t)=\dot{G}^{-1}(t)G^{-1}(t)\right)$$

имеем

$$\lambda_{\min}(H(t))\|x\|^2\le V(x)\le\lambda_{\max}(H(t))\|x\|^2$$

где знак равенства имеет место лишь тогда, когда вектор $x(t)$ является собственным вектором, отвечающим собственным значениям соответственно $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$. Поэтому из (2.3)

$$\left(G^{-1}(a)x(a),G^{-1}(a)x(a)\right)\le\lambda_{\max}(H(a))\|x(a)\|^2\le\rho^2 \tag{2.4}$$

где [1]

$$\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\le\lambda_i(H(a))\le 2\omega^2 \tag{2.5}$$

Выбирая $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы было $\alpha+\varepsilon<0$, поскольку $\chi[x(t)]<\alpha+\varepsilon$, получим $\|x(t)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$

т.е.
$$\|x(t)\|=0\left(e^{(\alpha+\varepsilon)t}\right),\ (t\in[a,\infty)) \tag{2.6}$$

Согласно (2.5) и (2.6) имеем

$$\left(G^{-1}(t)x,G^{-1}(t)x\right)_,\le\lambda_{\max}(H(t))\|x\|^2\le 2\omega^2\cdot 0\left(e^{(\alpha+\varepsilon)t}\right)\le\rho^2\qquad (t\in(a,\infty))$$

Из соотношения (2.6) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$, т.е. невозмущенный процесс асимптотически устойчив на $[t_0,\infty)$.

**Теорема 2.2.** Если наибольшее собственное значение $\Lambda(t)$ эрмитовой матрицы $A^H(t)=\dfrac{1}{2}\left[A(t)+A^*(t)\right]$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(t)\le -h<0\qquad [t_0<t<\infty) \tag{2.7}$$

то тривиальное решение (невозмущенный процесс) системы

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t),\quad (A(t)\in c[t_0,\infty)) \tag{2.8}$$

асимптотически $K_\Delta^\omega$ устойчиво.

**Доказательство.** Пусть (2.7) выполняется и решение $x(t)$ системы (2.8) в начальный момент времени $t=t_0$ удовлетворяет соотношению

$$\left(G^{-1}(t_0)x(t_0),G^{-1}(t_0)x(t_0)\right)_,\le\rho^2 \tag{2.9}$$

где $\left(G(t)\in k_\Delta^\omega\right)$, а $\rho>0$ – достаточно малое число. Из неравенства Важевского

$$\|x(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau)d\tau\le\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|\exp\int_{t_0}^{t}\Lambda(\tau)d\tau$$

где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения эрмитовой матрицы $A^H(t)$, в силу (2.7) имеем

$$\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|\exp[-h(t-t_0)],\ (t_0\le t<\infty) \tag{2.10}$$

отсюда

$$\|x(t)\| \le \|x(t_0)\| \qquad (t_0 \le t < \infty) \tag{2.11}$$

Поскольку все собственные значения матрицы $H(t) = \dot{G}^{-1}(t)G^{-1}(t)$ удовлетворяют неравенству (2.5), когда $t > t_0$, то из (2.11) следует неравенство $\left(G^{-1}(t)x(t),\ G^{-1}(t)x(t)\right) \le \rho^2$, а из (2.10) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$.

Если система (2.8) приводимая, т.е. существует преобразование Ляпунова, через которого система (2.8) приводится к системе $\dot{x} = By$ с постоянной матрицей $B$, поскольку при преобразовании Ляпунова характеристические показатели линейной дифференциальной системы сохраняются и являются действительными частями собственных значений постоянной матрицы $B$, то, согласно теоремам 3.1 и 3.2 [3], в качестве следствия получаются следующие утверждения:

1) Для $K_\Delta^\omega$ устойчивости приводимой линейной однородной системы (2.8) необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические показатели были неположительными, причем нулевым характеристическим показателям отвечают простые элементарные делители.

2) Для асимптотической $K_\Delta^\omega$ устойчивости приводимой линейной однородной системы (2.8) необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические показатели были отрицательными.

В частном случае, если в (2.8) матрица $A(t)$ $t_0 \le t < \infty$ ограничена и треугольная $\left(a_{ij}(t) = 0,\ \ i < j,\ t_0 \le t < \infty\right)$, то совокупность средних значений его диагональных коэффициентов определяет совокупность его характеристических показателей.

$$\alpha_k = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau \quad (i = 1..n).$$

Следовательно, когда $\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau < 0 \quad (t \in [0,\infty))$, тривиальное решение системы (2.8) будет асимптотически $k_\Delta^\omega$- устойчивым.

3.Рассмотрим процесс, описываемый линейным однородным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x \qquad A(t+\omega) = A(t); \quad \omega > 0 \tag{3.1}$$

где $A(t) - n \times n$-матрица, непрерывная (или кусочно-непрерывная) на $(-\infty,+\infty)$. Его нормированная фундаментальная матрица имеет вид $X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}$, $(X(0) = E; E -$ единичная матрица), где $\Phi(t) \in C^1$ (или кусочно-гладкая) $\omega-$периодичная невырожденная матрица $\Phi(0) = E$, а $\Lambda$- матрица порядка $n \times n$

$$\Lambda = \frac{1}{\omega}Ln X(\omega), \quad X(\omega) = e^{\Lambda\omega}.$$

Характеристические показатели линейной периодической системы $\lambda_i$

и характеристические показатели Ляпунова $\alpha_j$ нетривиальных решений этой системы связаны соотношением $\alpha_j = \mathrm{Re}\,\lambda_j$, где

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega} Ln\rho_j = \frac{1}{\omega}\left[\ln|\rho_j| + i(\arg\rho_j + 2k\pi)\right] \quad (j=1,...n; \quad k=0, \pm1, \pm2,...)$$

$(\rho_j -$ собственные значения матрицы $X(\omega))$ $\alpha_j = \mathrm{Re}\,\lambda_j = \frac{1}{\omega}\ln|\rho_j|$ $(j=1,...m;\ m \le n)$.

Отсюда, согласно вышеизложенным следствиям: а) при $|\rho_j| \le 1$ $(j=1,...,m)$ тривиальное решение периодической системы (3.1) будет $K_\Delta^\omega$ устойчивым, если при $|\rho_j| = 1$ соответствующие элементарные делители матрицы $X(\omega)$ – простые; б) при $|\rho_j| < 1$ $(j=1,...,n)$ асимптотически $K_\Delta^\omega$ устойчиво.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале.- Итоги науки и техники. Общая механика.- 1976, т.3, с. 43-124.
2. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. -Тр. Моск. ав. ин-та, 1975, № 339, с. 5-11.
3. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. -ПММ, 1977, т. 41, № 5, с. 844-849.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.-М.: Гостехиздат, 1950, 450 с.
5. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: Изд. АН СССР, 1962, 320с.



Ереванский архитектурно-строительный институт



Поступила в редакцию 22.04.1999