ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.6

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ГРАНИЦЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ТВЕРДЫМ ПОКРЫТИЕМ

Асрян Н. Г., Багдоев А. Г.

Ն.Գ. Ասրյան, Ա.Գ. Բագդոև
Սեղմելի հեղուկով զբաղեցված կիսահարթության պինդ եզրով կամայական արագությամբ տարածվող ճակատի ճնշման խնդրի լուծումը

Դիտարկվում է իդեալական սեղմելի հեղուկով զբաղեցված և սառցե ծածկույթով կիսահարթության ներքին մասը թափանցող ճնշման որոշման խնդիրը:

Ճնշման ճակատի շարժման օրենքը մակերևույթով կամայական է: Խառը եզրային պայմաններով այդ խնդրի լուծումը տրվում է հիմնվելով այն մեթոդների վրա, որոնք զարգացված են վերջավոր (թափով) թևի և առաձգական միջավայրում ճաքերի տեսություններում:

N.G. Asrian, A.G. Bagdoev
The solution of problem on pressure front propogating along rigid boundary of halfplane, occupied by compressive fluid

Рассматривается задача проникновения давления в глубь сжимаемой идеальной жидкости, занимающей нижнюю полуплоскость с ледовым покровом.

Закон движения фронта давления по поверхности произвольный. Решение задачи со смешанными граничными условиями производится методами, развитыми в теории крыла конечного размаха и теории трещин в упругой среде. Получено значение нормальной скорости частиц жидкости под фронтом давления и потенциала (давления) вне его.

1. Общее решение задачи

Рассматривается задача о проникании давления в глубь сжимаемой идеальной жидкости, занимающей полуплоскость.

Выберем ось x по поверхности невозмущенной среды, ось y направим перпендикулярно вниз. Жидкость покрыта тонким слоем льда.

При распространении фронта давления по поверхности лед разрушается. Таким образом, имеем следующую граничную задачу:

При $y=0$, $x<l(t)$, $P=P_1(x,t)$, при $x>l(t)$, $v=0$;

где P-давление, v-нормальная скорость жидкости к поверхности $y=0$. $x=l(t)$ закон распространения координаты граничного давления.

Отметим, что в данной статье рассмотрена задача для жидкости, покрытой слоем льда. То же решение годится и в случае, когда поверхность жидкости покрыта тонким слоем любого хрупкого материала. Вместе с тем, повидимому, случай ледового покрытия является наиболее важным с практической точки зрения.

Рассматриваемая задача актуальна, поскольку в ней изучается влияние взрывной волны на подводные объекты, покрытые слоем льда.

Вводя потенциал скорости $\varphi(x,y,t)$ по формуле $P=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, где ρ – плотность, можно, учитывая, что $\partial\varphi/\partial y = v$, записать граничное условие в виде $y=0$

$$\varphi=\varphi_1(x,t) \text{ при } x<l(t),\ \partial\varphi/\partial y=0 \text{ при } x>l(t) \tag{1.1}$$

$\varphi_1(x,t)=-\frac{1}{\rho}\int\limits_{F(x)}^{t}P_1(x,t)dt,\quad t=F(x)$ есть функция, обратная к $x=l(t)$.

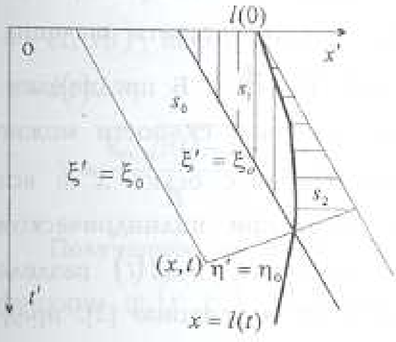
Для потенциала φ имеет место волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

Введением функции $v=\partial\varphi/\partial y$, условия (1.1) с учетом (1.2) запишутся в виде $y=0$

$$\partial v/\partial y=f(x,t) \text{ при } x<l(t),\ v=0 \text{ при } x>l(t) \tag{1.3}$$

где $$f(x,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

и предположено, что $\dot{l}(t)<c$

Таким образом, для функции v задача свелась к антиплоской задаче о трещине в изотропной упругой среде, распространяющейся с произвольной скоростью [1,2,3]. Решение уравнения (1.2), верного и для функции v, при граничных условиях (1.3) можно искать методом интегральных уравнений [3, 4, 5]. Согласно [3, 5] можно записать для функции v интеграл Поссио на границе среды:

$$v=-\frac{c}{\pi}\iint\frac{(\partial v/\partial y)_{y=0}}{\sqrt{T}}dx'dt',\ T=c^2(t-t')^2-(x-x')^2 \tag{1.5}$$

где согласно (1.3) при $x'<l(t')(\partial v/\partial y)_{y=0}=f(x',t')$, причем $f(x,t)$ дается (1.4). При этом, интегрирование согласно [5], где рассмотрена аналогичная задача о крыле в характеристических координатах

$$\xi'=ct'-x',\quad \eta'=ct'+x',\quad \xi_0=ct-x,\quad \eta_0=ct+x \tag{1.6}$$

должно вестись по заштрихованной области фиг. 1, в пределах $\xi_a<\xi'<\xi_0$, $-\xi'<\eta'<\eta_0$ причем ξ_a соответствует точке $x'=l(t_2)$, $t'=t_2$ пересечения характеристики $\eta'=\eta_0=ct_2+l(t_2)$ с кривой $x' = l(t')$

$$\xi_a = ct_2 - l(t_2), \quad ct + x = ct_2 + l(t_2) \tag{1.7}$$

Тогда в характеристических координатах при $x < l(t)$ получится

$$\mathrm{v} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\xi_a}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi'}^{\eta_0} f_1(\xi', \eta') \frac{d\eta'}{\sqrt{(\xi_0 - \xi')(\eta_0 - \eta')}} \tag{1.8}$$

причем $f_1(\xi', \eta') = f(x', t')$.

В задаче о штампе в переменных $\varphi, (\partial\varphi/\partial y)_{y=0}$ вместо $\mathrm{v}, (\partial \mathrm{v}/\partial y)_{y=0}$ формула (1.8) получена в [6].

Следует отметить, что приведенное ниже решение дается в предположении о дозвуковой скоростьи фронта давления, что может иметь место при взрыве на самой поверхности.

В случае взрыва в воздухе, вначале скорость ударной волны вдоль поверхности сверхзвуковая, а далее становится дозвуковой. Тогда на фиг.1 следует участок оси x' $0 < x' < l(0)$ заменить на сверхзвуковую часть кривой $x = l_1(t)$, что соответствует в задаче о крыле сверхзвуковой передней кромке [5]. Тогда все приведенные ниже формулы сохранятся, только в нижний предел интегралов по η' следует ставить значения, соответствующие сверхзвуковой части кривой $x' = l(t')$. В предположении малости времени достижения фронтом звуковой скорости можно считать сверхзвуковую часть кривой, совпадающей с осью x и все нижеприведенное сохраняет силу. Кроме того, при цилиндрическом взрыве в воздухе, вообще говоря, имеются две точки $x = \pm l(t)$ раздела граничных условий. Как и в задаче о крыле [5] и трещине [3], предполагается, что рассматриваются моменты времени, для которых дозвуковые части кривой $x' = l(t')$ фиг. 1 и соответствующей кривой $x' = -l(t')$ взаимно не влияют, что соответствует области справа от характеристики $\xi = -l(0)$ для приведенной на фиг. 1 картины, описывающей правую часть диаграммы x', t', связанную с правым фронтом $x = l(t)$.

То, что интегрирование в (1.8) следует выбрать так, как сделано, следует из граничного условия $\mathrm{v} = 0$ при $x > l(t)$, причем из (1.5) после замены $\tau_1 = (\partial \mathrm{v}/\partial y)_{y=0}$ получится

$$\int_{-\xi}^{\eta_2(\xi)} \frac{\tau_1 d\eta'}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} + \int_{\eta_1(\xi_0)}^{\eta_0} \frac{\tau_1 d\eta'}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} = 0, \quad \eta_2(\xi_0) = ct_2 + l(t_2)$$

Тогда, записывая интегралы в (1.5) по заштрихованной области, и областям S_1, S_2 фиг. 1, можно видеть, что интегралы по S_1, S_2 сокращаются и получится (1.8). Тогда из (1.8) получится

$$\mathrm{v} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l(t_2)-ct_2}^{ct-x} d\xi' \int\limits_{-\xi'}^{\eta_0} f_1(\xi', \eta') \frac{d\eta'}{\sqrt{(ct-x-\xi')(\eta_0-\eta')}} \tag{1.9}$$

2. Определение решения вблизи края фронта давления

Вблизи края фронта давления на границе $x \approx l(t)$ интегрирование по ξ' ведется по узкой области, для которой $\xi' \approx \xi_a$, причем

$$\xi_0 - \xi_a \approx \{l(t) - x\} \frac{2}{1 + \dot{l}(t)/c} \tag{2.1}$$

где точка означает дифференцирование по времени. Вычисляя интеграл по ξ' в (1.9), где в $f_1(\xi', \eta')$ и в нижнем пределе интегрирования по η' подставлено $\xi' = \xi_0$, переходя к переменной интегрирования x', для которой вдоль характеристики $\xi' = \xi_0$, имеет место $d\eta' = 2dx'$, $\eta_0 - \eta' = 2(x - x')$, учитывая, что пределы интегрирования по x' будут $x - ct,\ l(t)$, используя (2.1), можно получить под фронтом давления при $x = l(t)$

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{k}_2\sqrt{l(t)-x}}{\pi}, \quad k_2 = -\frac{2}{\sqrt{1+\dot{l}(t)/c}} \int\limits_{l(t)-ct}^{x} \frac{f\{x', t - l(t)/c + x'/c\}}{\sqrt{x - x'}} dx' \tag{2.2}$$

Полученное решение дает правильное поведение v только для функции $\varphi_1(x', t')$, гладкой в точке $x' = l(t')$.

В случае разрывной по производной функции $\varphi_1(x', t')$ в точке $x' = l(t')$ интеграл в (2.2) дает увеличение особенности при $x = l(t)$. При этом в (1.5) следует дважды проинтегрировать по частям интегралы по x', t', заменить производные по x', t' от $\frac{1}{\sqrt{T}}$ через производные по x, t и учесть формулу

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T^{3/2}} \tag{2.3}$$

Тогда (1.5) можно записать в виде

$$\mathrm{v} = -\frac{c}{\pi}\iint \varphi_1(x', t') \frac{dx'dt'}{T^{3/2}} \tag{2.4}$$

В характеристических координатах ξ', η' получится, как и в (1.8), формула

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int_{\xi_a}^{\xi_0} d\xi' \int_{-\xi}^{\eta_0} \varphi_1(x', t') \frac{d\eta'}{(\xi_0 - \xi')^{3/2}(\eta_0 - \eta')^{3/2}} \tag{2.5}$$

Повторяя выкладки, сделанные при получении (2.2), используя (2.1), переходя от η' к x', вычисляя конечную часть интеграла по ξ', можно получить при $x = l(t)$ соотношение:

$$v = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1+\dot{l}(t)/c}}{\sqrt{l(t)-x}}\int_{x-ct}^{x} \varphi_1\left(x', t - \frac{1}{c}x + \frac{1}{c}x'\right)\frac{dx'}{(x-x')^{3/2}} \tag{2.6}$$

В случае же непрерывной в точке $x = l(t)$, но имеющей излом, функции $\varphi_1(x,t)$, например,

$$\varphi_1(x,t) = B(x,t)\{l(t) - x\} \tag{2.7}$$

где $B\{l(t), t\} \neq 0$, а более конкретно, для случая разрывного давления на фронте $P = P_1 = \mathrm{const}$, при котором

$$\varphi_1(x,t) = -\frac{1}{\rho}P_1\{t - F(x)\} \tag{2.8}$$

интеграл в (2.6) в точке $x' = l(t)$ дает с точностью до множителя $-\frac{1}{\rho\sqrt{c}}P_1$, при переходе от переменной интегрирования x' к $t' = t + x'/c - x/c$

$$\int_0^t \frac{t' - F\{l(t) + ct' - ct\}}{(t-t')^{3/2}}dt' \tag{2.9}$$

Нижний предел не дает особенности, а при $t' \to t$ подынтегральная функция в (2.9), с учетом того, что $F\{l(t)\} = t$, равна приближенно

$$\frac{t' - t - \dot{F}\{l(t)\}c(t-t')}{(t-t')^{3/2}} = -\frac{1 - c\dot{F}(l)}{\sqrt{t-t'}} \tag{2.10}$$

причем $\dot{F}(l) = 1/\dot{l}(t)$. Таким образом, для граничной функции $\varphi_1(x', t')$, обращающейся в нуль первого порядка при $x' = l(t')$, интеграл в (2.6) для $x = l(t)$ имеет конечное значение, и имеет место известная из теории трещин [3] особенность функции v.

3. Определение потенциала вне фронта давления

Можно также получить значение $\varphi(x,t)$ при $x > l(t)$ на поверхности среды. Для этого следует применить метод сверток [2, 6].

Запишем

$\varphi = \varphi_+(x,t) + \varphi_-(x,t), \quad v = v_+(x,t) + v_-(x,t)$

где индекс "+" соответствует функциям, равным нулю при $x < l(t)$, а индекс "–" функциям, равным нулю при $x > l(t)$.

Вводя преобразование Лапласа по t, $\bar{\varphi}(x,y,s) = \int\limits_0^\infty e^{-st'}\varphi(x,y,t')dt'$,

полагая $\bar{\varphi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1 x - i\beta y} \cdot \varphi d\alpha_1$ и, подставляя в (1.2), можно получить $\beta = -i\sqrt{s^2/c^2 + \alpha_1^2}$. Вводя преобразования Лапласа и Фурье от функций φ и v на границе полуплоскости $y = 0$

$$\bar{\bar{\varphi}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1 x'}\bar{\varphi}(x',0,s)dx', \qquad \bar{\bar{v}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha_1 x'}\bar{v}(x',0,s)dx' \tag{3.1}$$

используя равенство $v = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, можно получить для $\bar{\bar{\varphi}}, \bar{\bar{v}}$

$$\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\bar{S}}(\alpha_1, s)\bar{\bar{v}} \tag{3.2}$$

где $$\bar{\bar{S}} = -\frac{1}{\sqrt{s^2/c^2 + \alpha_1^2}} \tag{3.3}$$

Записывая факторизацию функции $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_+\bar{\bar{S}}_-$, где [6]

$$\bar{\bar{S}}_+ = \frac{1}{\sqrt{s/c - i\alpha_1}}, \quad \bar{\bar{S}}_- = \frac{1}{\sqrt{s/c - i\alpha_1}} \tag{3.4}$$

вводя также функции $\bar{\bar{P}}_\pm = 1/\bar{\bar{S}}_\pm$, можно из (3.2), следуя [2, 6], получить

$$\varphi_+ = S_+ ** \{(S_- ** v_+ - P_+ ** \varphi_-)H(x - l)\} \tag{3.5}$$

$$v_- = -P_- ** \{(S_- ** v_+ - P_+ ** \varphi_-)H(l - x)\} \tag{3.6}$$

где $H(x)$ есть единичная функция. Звездочки обозначают свертки по x', t'. В силу того, что $v_+ = 0$, из (3.6) можно после некоторых преобразований получить значение v под фронтом давления, даваемое (1.5), (2.4). Из (3.5) получится при $x > l(t)$

$$\varphi_+ = -S_+ ** \{(P_+ ** \varphi_-)H(x - l)\} \tag{3.7}$$

Функции S_+, P_+ находятся из (3.4) применением обратных преобразований Лапласа и Фурье в виде [6]

$$S_+(t,x) = -\frac{H(x)\delta(t - x/c)}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}, \quad P_+(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\delta(t - x/c)\frac{H(x)}{x^{3/2}} \tag{3.8}$$

Для граничной функции, заданной в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{0-} = -\delta(x-\xi)H(t-\tau) \tag{3.9}$$

можно получить для внутренней свертки в (3.7)

$$P_+ * * \varphi_{0-} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{H(x-\xi)}{(x-\xi)^{3/2}}H\left(t - \tau - \frac{x}{c} + \frac{\xi}{c}\right) \tag{3.10}$$

Из (3.7) и (3.10) с учетом (3.8) после замены $x - x' - \xi = X'$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{0+} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(x')}{X'^{3/2}}\frac{H(x - X' - \xi)}{\sqrt{x - X' - \xi}}H\left(t - \tau - \frac{x}{c} + \frac{\xi}{c}\right)\times \\ \times H\left\{X' + \xi - l\left(t - \frac{x}{c} + \frac{\xi}{c} + \frac{X'}{c}\right)\right\}dX' \end{aligned} \tag{3.11}$$

Нижний предел интегрирования находится из условий

$$X' + \xi - l(t_0) = 0, \quad t_0 = t - x/c + \xi/c + X'/c = t - x/c + l(t_0)/c \tag{3.12}$$

Заменяя переменную интегрирования $\frac{1}{\sqrt{X'}} = y'$, можно из (3.11) с учетом (3.12) получить

$$\varphi_{0+} = -\frac{1}{\pi}H\left(t - \tau - \frac{x}{c} + \frac{\xi}{c}\right)\frac{1}{x-\xi}\frac{\sqrt{x - l(t_0)}}{\sqrt{l(t_0) - \xi}}$$

Для произвольной граничной функции $\varphi_1(t,x)$, пользуясь соотношением [2]

$$\varphi_+(t,x) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\varphi_{0+}(t,\tau,x,\xi)d\tau\, d\xi \tag{3.13}$$

можно получить

$$\varphi_+(t,x) = \frac{\sqrt{x - l(t_0)}}{\pi\sqrt{c}}\int_0^{t_0}\varphi_1\{\tau, x - (t-\tau)c\}\frac{d\tau}{\sqrt{t_0 - \tau}(t-\tau)} \tag{3.14}$$

где учтено, что вдоль характеристики

$$l(t_0) - x + c(t-\tau) = c(t_0 - \tau) \tag{3.15}$$

Для реальной задачи, в которой имеет место нулевое значение потенциала в точке $x = l(t)$, а именно, $\varphi_1(x',t') = B(x',t')\{l(t') - x'\}$, интеграл в формуле (3.14) является конечным. Таким образом, для функции $\varphi_- = \varphi_1(\tau,\xi)$, обращающейся в нуль при $\xi = l(t)$ (3.14) дает известное по характеру особенности решение для $\frac{\partial \varphi_+}{\partial t}$ [6].

Отметим, что в [7] дано решение задачи о давлении, распространяющемся вглубь упругой среды.

Решение анизотропной задачи о антиплоской трещине в упругой среде дано в [8].

Задача о трещине рассмотрена в [9], где записаны формулы вида (1.5), (1.8), однако там не рассмотрено упрощение вблизи края трещины. Кроме того, в [3] и [9] знак перед интегралом в формуле, аналогичной (1.5), следует изменить на обратный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины.-Механика, ЕГУ, 1989, вып. 7, с. 3-7.
2. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.-Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4, с. 54-73.
3. Костров В. Б. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига.-ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, с. 1042-1050.
4. Ward G. Supersonic flow past thin wings.-The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathem.1949, V, II, Part. 2.
5. Красильщикова В. Б. Тонкое крыло в сжимаемом потоке.-М.: Наука, 1978. 223с.
6. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости.-М.: Наука, 1986, 328с.
7. Мартиросян А. Н. Краевые задачи нестационарного движения анизотропных и изотропных упругих сред.- Докторская диссертация, Ереван, 1990. 278с.
8. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н., Сафарян Ю. С. Антиплоская задача для трещины, движущейся с произвольной скоростью в анизотропной упругой однородной среде.- Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т. 51, № 1, с. 16-20.
9. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология.- М.: Мир, 1983. 880с.

Институт механики НАН Армении
Ереванский архитектурно-строительный институт

Поступила в редакцию 11.02.1999