ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика

УДК 517.9

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

Асанян Д. Д., Оганесян А. О.

Դ. Ջ. Հասանյան, Ա. Օ. Հովանիսյան

$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$ հավասարման խմբային անալիզը

Աշխատանքում վերը նշված հավասարման համար կատարված է խմբային անալիզ: Խմբային անալիզը թույլ է տալիս նշված հավասարման ինվարիանտ լուծումների որոշումը հանգեցնել սովորական ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

D.J. Hasanyan, A.O. Hovanesyan

Group properties of $u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q$

В работе приводится групповой анализ для вышеприведенного уравнения. Групповой анализ позволяет свести нахождение инвариантных решений рассматриваемого уравнения с частными производными к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.Введение

Начиная с 60-ых годов, резко возросло число работ, посвященных групповым классификациям дифференциальных уравнений. В частности, работы [1-5] посвящены групповым классификациям, построению инвариантных решений различного рода дифференциальных уравнений, встречающихся в механике сплошных сред.

Решение многих физических проблем сводится к исследованию квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными вида

$$u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} = g(u) u_x^p u_y^q \tag{1}$$

где $m, n, p, q \in R$ — произвольные постоянные, а функция $g(u) \in C^2(R)$. На основе группового анализа получены те преобразования координат, относительно которых уравнение (1) остается инвариантным.

2. Алгебра Ли для уравнения (1)

Инфинитизимальный оператор группы симметрии уравнения (1) ищем в виде [1,2]

$$X = \xi^1(x, y, u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y, u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x, y, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2}$$

Тогда операторы $\underset{1}{X}$ и $\underset{2}{X}$ соответственно первого и второго продолжения группы имеют вид:

$$\underset{1}{X} = X + \varsigma_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial u_y} \tag{3}$$

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \varsigma_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varsigma_{22} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \varsigma_{12} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} \tag{4}$$

где $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_{11}, \varsigma_{12}, \varsigma_{22}$ выражаются через $\xi^1, \xi^2, \eta, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ по формулам [1]:

$$\varsigma_k = D_k(\eta) - u_j D_k(\xi^j),\ \varsigma_{ij} = \widetilde{D}_j(\varsigma_i) - u_{ik}\widetilde{D}_j(\xi^k),\ D_i = \partial_i + u_i \partial_u$$

$$\widetilde{D}_i = D_i + u_{ik}\partial_{u_k},\ \partial_i = \partial / \partial x_i,\ \partial_u = \partial / \partial u,\ \partial_{u_k} = \partial / \partial u_k,\ u_i = \partial / \partial x_i$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y \quad (i = 1,2)$$

Функции ξ^1, ξ^2 и η находятся из следующего определяющего уравнения [1,2]:

$$\underset{2}{X} F\big|_{F=0} \equiv 0 \tag{5}$$

где $F = u_{xx} - u_x^n u_y^m u_{yy} - g(u) u_x^p u_y^q$. Уравнение (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&- f_{u_x}\{\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x^1 - (u_x)^2\xi_u^1 - u_y\xi_x^2 - u_x u_y \xi_u^2\} - \\
&- f_{u_y}\{\eta_y + u_y\eta_u - u_x\xi_y^1 - u_x u_y\xi_u^1 - u_y\xi_y^2 - (u_y)^2\xi_u^2\} - \\
&- n u_x^{n-1} u_y^m u_{yy}\{\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x^1 - (u_x)^2\xi_u^1 - u_y\xi_x^2 - u_x u_y\xi_u^2\} - \\
&- m u_x^n u_y^{m-1} u_{yy}\{\eta_y + u_y\eta_u - u_x\xi_y^1 - (u_y)^2\xi_u^2 - u_y\xi_y^2 - u_x u_y\xi_u^1\} + \\
&+ \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + \eta_u u_x^n u_y^m u_{yy} + (u_x)^2\eta_{uu} - 2\xi_x^1[u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - \\
&- u_x\xi_{xx}^1 - 2(u_x)^2\xi_{xu}^1 - 3u_x\xi_u^1[u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - (u_x)^3\xi_{uu}^1 - 2u_{xy}\xi_x^2 - \\
&- u_y\xi_{xx}^2 - 2u_x u_y\xi_{xu}^2 - u_y\xi_u^2[u_x^n u_y^m u_{yy} + f] - u_y(u_x)^2\xi_{uu}^2 - 2u_x u_{xy}\xi_u^2 - \\
&- u_x^n u_y^m\{\eta_{yy} + 2u_y\eta_{yu} + u_{yy}\eta_u + (u_y)^2\eta_{uu} - 2u_{xy}\xi_y^1 - u_x\xi_{yy}^1 - 2u_x u_y\xi_{yu}^1 - \\
&- u_x u_{yy}\xi_u^1 - 2u_y u_{xy}\xi_u^1 - u_x(u_y)^2\xi_{uu}^1 - 2u_{yy}\xi_y^2 - u_y\xi_{yy}^2 - 2(u_y)^2\zeta_{yu}^2 - \\
&- 3u_y u_{yy}\xi_u^2 - (u_y)^3\xi_{uu}^2\} - \eta f_u' + f\eta_u \equiv 0, \quad f(u, u_x, u_y) = g(u) u_x^p u_y^q
\end{aligned} \tag{6}$$

Для произвольных целых чисел $m, n, p, q \in R$ и функций $g(u)$ из уравнении (6) получаем $\xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2, \eta = 0$ и базис алгебры Ли имеет вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{7}$$

В дальнейшем рассматриваются следующие основные случаи показателей m и n.

I) $n=0,\ m=0$; II) $n=1,\ m=0$; III) $n=1,\ m=-1$; IV) $n=0,\ m=-1$; V) $n\neq 0,1,2,\forall m$; VI) $m=0,\forall n$; VII) $n=0,\forall m$; VIII) $n=2,\ m=-2$.

В каждом из указанных случаев из определяющего уравнения соответственно получаем

I) $\xi^1_y=\xi^2_x, \xi^2_y=\xi^1_x, \xi^1_u=\xi^2_u=0$ (8)

II) $-\eta_u+2\xi^2_y-\xi^1_x=0, \xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0, \eta_x=0$ (9)

III) $\xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_x=\eta_y=0, \xi^2_y=\xi^1_x$ (10)

IV) $\xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_y=0, \eta_u+\xi^2_y-2\xi^1_x$ (11)

V) $\xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=\eta_x=\eta_y=0,\ (m+2)\xi^2_y+(n-2)\xi^1_x-(n+m)\eta_u=0$ (12)

VI) $\xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0, -2\xi^2_y-(n-2)\xi^1_x+n\eta_u=0$ (13)

VII) $\xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0,\ -(m+2)\xi^2_y+2\xi^1_x+m\eta_u=0$ (14)

VIII) $\xi^1_u=\xi^2_u=\xi^2_x=\xi^1_y=0$ (15)

При этом определяющее уравнение (6) упрощается и принимает вид

$$\eta_{xx}+2u_x\eta_{xu}+u_x^2\eta_{uu}-u_x\xi^1_{xx}-u_y\xi^2_{xx}-u_x^n u_y^m\eta_{yy}-2u_x^n u_y^{m+1}\eta_{yu}-u_x^n u_y^{m+2}\eta_{uu}+$$
$$+u_x^{n+1}u_y^m\xi^1_{yy}+u_x^n u_y^{m+1}\xi^2_{yy}-\eta f_u-f_{u_x}\eta_x-f_{u_x}u_x(\eta_u-\xi^1_x)+f_{u_x}u_y\xi^2_x-f_{u_y}\eta_y \quad (16)$$
$$f_{u_y}u_y(\eta_u-\xi^2_y)+f(\eta_u-2\xi^1_x)=0$$

I) Исследование уравнения (16) приводит к следующим подслучаям:

$a)$ $p=0,\ q=0$.

$a_1)$ $g(u)$ – произвольная функция. Уравнения (8)-(16) удовлетворяются, если

$$\eta=0, \xi^1=c_1y+c_2, \xi^2=c_1x+c_3 \quad (17)$$

Полагая поочередно одну из постоянных c_i $(i=1,2,3)$ равной 1, а остальные, приравнивая к нулю, получим следующий базис алгебры Ли:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x};\ X_2=\frac{\partial}{\partial y};\ X_3=y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y} \quad (18)$$

$a_2)$ $g(u)=Ae^{\lambda u}$ $(A=\mathrm{const}, \lambda=\mathrm{const})$, тогда из (8)-(16) имеем

$$\eta=-\frac{2c_1}{\lambda};\ \xi^1=c_1x+c_2y+c_3; \xi^2=c_2x+c_1y+c_4 \quad (19)$$

Базис алгебры Ли в этом случае состоит из операторов X_i $(i=1,2,3)$ и еще

$$X_4(\lambda)=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \quad (20)$$

$a_3)$ $g(u)=A(u+\alpha)^\beta$, $(A,\alpha,\beta=\mathrm{const},\beta\neq 1)$. Тогда из (6)-(8) получим

$$\eta = \frac{2c_1}{1-\beta}(u+\alpha),\ \xi^1 = c_1x + c_2y + c_3,\ \xi^2 = c_2x + c_1y + c_4 \tag{21}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_i $(i = 1,2,3)$ и

$$X_5(\lambda) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{1-\beta}(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u} \tag{22}$$

При $\beta = 1$ уравнение (1) линейно и в этом случае

$$\xi^1 = c_2y + c_3,\ \xi^2 = c_2x + c_4,\ \eta = c_1u + a(x,y) \tag{23}$$

где функция $a(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a = 0 \tag{24}$$

Базис алгебры Ли в этом случае бесконечен.

$a_4)$ $g(u) = Ae^{-2\lambda u}$ $(A, \lambda = \mathrm{const})$. Тогда получим случай $a_2)$. Легко убедиться, что (6)-(8) можно удовлетворить, выбирая также

$$\xi^1 = \varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y),\ \xi^1 = -\varphi_1(x-y) + \varphi_2(x+y) + c_1$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda}[\varphi_1'(x-y) + \varphi_2'(x+y)] \tag{25}$$

$b)$ p и q – произвольные постоянные $(p \neq 2, q \neq 2)$. Определяющие уравнения (8)-(16) можно удовлетворить при следующих подслучаях:

$b_1)$ если $g(u)$ – произвольная функция, то

$$\eta = 0, \xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2$$

Базисом алгебры Ли в этом случае будут операторы X_1 и X_2.

$b_2)$ если $g(u) = A(u+\alpha)^\beta$, то

$$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \xi^2 = c_1y + c_3,\ \eta = c_4u + c_5,\ c_5 = \alpha c_4,\ c_4 = \frac{p-2+q}{\beta+p+q-1}c_1 \tag{26}$$

Базис алгебры Ли в этом случае образуют операторы X_1 и X_2, а также оператор

$$X_6(\alpha,\beta,p,q) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (u+\alpha)\frac{p-2+q}{p+q-1+\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{27}$$

$b_3)$ при $g(u) = Ae^{\lambda u}$ из (8)-(16) получим

$$\xi^1 = c_1x + c_2,\ \xi^2 = c_1y + c_3,\ \eta = c_5,\ c_5 = \frac{p-2+q}{\lambda}c_1 \tag{28}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_1 и X_2 и

$$X_7(\lambda,p,q) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{p-2+q}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{29}$$

Заметим, что

$$X_7(\lambda,0,0) = X_4(\lambda);\ X_6(\alpha,\beta,0,0) = X_5(\alpha,\beta) \tag{30}$$

$c)$ при $p=2, q=0, g(u)=(u+\alpha)^{-1}$ легко убедиться, что уравнения (8)-(16) имеют решения

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \quad \xi^2 = c_1 y + c_3, \quad \eta = (u+\alpha)(c_4 x + c_5) \tag{31}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_i $(i=1,2,3)$ и

$$X_8 = (u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u}, X_9 = x(u+\alpha)\frac{\partial}{\partial u} \tag{32}$$

$d)$ Пусть теперь $p=0, q=2$. Этот случай получается из предыдущего, если поменять x на y и $g(u)$ на $-g(u)$.

II) Пусть $n=1; m=0$. При этом исследовании уравнений (9), (16) выделяются следующие подслучаи:

$a)$ $p=0, q=0$.

$a_1)$ При $g(u)=A=\mathrm{const}$ получим

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4, \eta = c_5 u + c_6 y + c_7, \ c_5 = 2c_1, \ c_3 = 3c_1/2 \tag{33}$$

Базисом алгебры Ли будут операторы X_1, X_2 и

$$X_{10} = \frac{\partial}{\partial u}, X_{11} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{2}y\frac{\partial}{\partial y} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, X_{12} = y\frac{\partial}{\partial u} \tag{34}$$

$a_2)$ При $g(u)=Ae^{\lambda u}$; $A, \lambda=\mathrm{const}$ получается

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4, \eta = c_5, \ c_5 = -2c_1/\lambda \tag{35}$$

и базис алгебры Ли составляют операторы X_1, X_2 и

$$X_{13} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_{14} = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{36}$$

$a_3)$ При $g(u)=A(u+\alpha)^{\beta}$; $A, \alpha, \beta=\mathrm{const}$

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \xi^2 = c_3 y + c_4, \eta = c_5 u + c_6, \ c_5 = 2c_1/(1-\beta), \ c_6 = \alpha c_5 \tag{37}$$

и базисными операторами алгебры Ли будут X_1, X_2, X_{13}, X_{14} и

$$X_{15} = x\frac{\partial}{\partial x} + (u+\alpha)\frac{2}{1-\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{38}$$

$b)$ $p=1, q=1$.

$b_1)$ $g(u)=\lambda=\mathrm{const}$. Тогда

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \ \xi^2 = c_3, \ \eta = -c_1 u + c_4 e^{-\lambda y} + c_5 \tag{39}$$

Базис алгебры Ли состоит из операторов X_1, X_2, X_{10} и

$$X_{16} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}; \quad X_{17}(\lambda) = e^{-\lambda y}\frac{\partial}{\partial u}. \tag{40}$$

$b_2)$ $g(u)=Ae^{\lambda u}$; $A, \lambda=\mathrm{const}$. Тогда

$$\xi^1 = c_1 x + c_2, \ \xi^2 = \frac{c_1}{2}y + c_3, \ \eta = c_4, \ c_4 = -c_1/2\lambda \tag{41}$$

и к операторам X_1, X_2 добавляется

$$X_{17}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial}{\partial u} \tag{42}$$

$b_3)\, g(u)=A(u+\alpha)^{\beta}$. Тогда

$$\begin{aligned}&\xi^1=c_1x+c_2,\ \ \xi^2=c_3y+c_4,\ \ \eta=c_5u+c_6\\ &c_5=-c_1/(1+2\beta),\ \ c_6=\alpha c_5,\ \ c_3=\beta c_1/(1+2\beta)\end{aligned} \tag{43}$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2 и

$$X_{18}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\beta}{1+2\beta}y\frac{\partial}{\partial u}-(u+\alpha)\frac{1}{1+2\beta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{44}$$

$c)\ p=1,\ \ q=0$.

$c_1)\ g(u)=\lambda=\mathrm{const}$, тогда

$$\xi^1=c_1x+c_2;\ \ \xi^2=\frac{1}{2}(c_1+c_5)y+c_3;\ \eta=c_5u+c_4y+c_6+\frac{c_5}{2}\lambda y^2 \tag{45}$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2, X_{10} и

$$X_{19}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y};\ X_{20}=\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}+u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\lambda y^2}{2}\frac{\partial}{\partial u};\ X_{21}=y\frac{\partial}{\partial u} \tag{46}$$

$c_2)\ g(u)=\lambda^2u$. В этом случае

$$\xi^1=c_1x+c_2;\ \xi^2=c_3;\ \ \eta=-c_1u+c_4e^{\lambda y}+c_5e^{-\lambda y} \tag{47}$$

и к операторам X_1, X_2 добавляются

$$X_{22}=x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u};\ X_{23}=e^{\lambda y}\frac{\partial}{\partial u};\ X_{24}=e^{-\lambda y}\frac{\partial}{\partial u} \tag{48}$$

$d)\ p=1,\ \ q=2$.

$d_1)\ g(u)=-\frac{3}{4}u^{-1}$, тогда

$$\xi^1=c_1x+c_2;\ \ \xi^2=\frac{1}{2}(c_1+c_3)y+\frac{c_5}{4}y^2+c_7;\ \ \eta=c_3u+c_5uy \tag{49}$$

В этом случае базис алгебры Ли состоит из операторов X_1, X_2, X_{19}

$$\text{и}\ \ X_{24}=u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y};\ \ X_{25}=\frac{y^2}{4}\frac{\partial}{\partial y}+uy\frac{\partial}{\partial u} \tag{50}$$

V) $n\neq 0,1,2;\ m-\forall$.

В этом случае уравнения (6) и (12) принимают вид

$$\begin{cases}\xi^1_y=\xi^1_u=\xi^2_x=\xi^2_u=\xi^1_{xx}=\xi^2_{yy}=\eta_x=\eta_y=\eta_{uu}=0\\ (n+m)\eta_u+(2-n)\xi^1_x-(m+2)\xi^2_y=0\\ -\eta\cdot g'(u)+g(u)[(1-p-q)\eta_u+(p-2)\xi^1_x+q\xi^2_y=0\end{cases} \tag{51}$$

При изучении системы (51) выделяются следующие подслучаи:

a) $g(u) = A(u+\alpha)^{\beta}$. Тогда из (51) получается

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_3y + c_4;\ \eta = c_5u + c_6;\ c_6 = \alpha c_5;\ c_5 = r_1c_1;\ c_3 = r_2c_1 \qquad (52)$$

где

$$r_1(\beta) = \frac{q(n-2)-(p-2)(m+2)}{q(n+m)-(m+2)(\beta-1+p+q)}$$

$$r_2(\beta) = \frac{(n-2)(\beta-1+p+q)-(p-2)(n+m)}{q(n+m)-(m+2)(\beta-1+p+q)}; \qquad n+m \neq 0$$

Базисом алгебры Ли являются операторы X_1, X_2 и

$$X_{26}(\beta) = x\frac{\partial}{\partial x} + r_2(\beta)y\frac{\partial}{\partial y} + (u+\alpha)r_1(\beta)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (53)$$

b) $g(u) = Ae^{\gamma u}$. Тогда из (51) имеем

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_3y + c_4;\ \eta = c_5;\ c_6 = \alpha c_5;\ c_5 = r_1c_1;\ c_3 = r_2c_1 \qquad (54)$$

где $c_3 = \dfrac{2-n}{n+m}c_1$; $c_5 = \dfrac{(p-2)(n+m)+q(2-n)}{\gamma(n+m)}c_1$; $\quad n+m \neq 0$.

При этом к операторам X_1, X_2 добавляется

$$X_{27}(\beta) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2-n}{n+m}y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(p-2)(n+m)+q(2-n)}{\gamma(n+m)}\frac{\partial}{\partial u} \qquad (55)$$

c) Если $g(u)$ произвольная функция и $n+m \neq 0$, то

$$\xi^1 = c_1;\ \xi^2 = c_2;\ \eta = 0 \qquad (56)$$

и базис алгебры Ли состоит из операторов X_1 и X_2.

d) В случае же, когда $g(u)$ произвольно, $n+m=0$, $p+q=2$ имеем

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_1y + c_3;\ \eta = 0 \qquad (57)$$

и базис алгебры Ли составляют операторы X_1, X_2 и X_7.

III) Этот случай получается из V), только в основных выражениях надо брать $n=1, m=-1$.

IV) Случай получается из случая II), только в основных выражениях надо поменять x на y, $g(u)$ на $-g(u)$ и q на $q+1$.

VI) $m=0$, $n - \forall$. Заметим, что все подслучаи, которые имели место в случае V), здесь тоже имеют место, но появляется новый вариант:

$p=n$, $q=1$, и если $g(u) = \lambda = \text{const}$, то

$$\xi^1 = c_1x + c_2;\ \xi^2 = c_3y + c_4;\ \eta = c_5u + c_6e^{-\lambda y} + c_7 \qquad (58)$$

где $c_3 = 0$; $c_5 = \dfrac{(n-2)}{n}c_1$.

Базисными операторами алгебры Ли являются X_1, X_2, X_{10}, X_{17} и оператор

$$X_{28}(n) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n+2}{n}u\frac{\partial}{\partial u} \tag{59}$$

Заметим, что $X_{28}(1) = X_{16}$. Если сделать замену $x \to y$; $n \to -m$; $g(u) \to -g(u)$; $q \to p$; $p \to q - m$, то легко убедиться, что VII) случай совпадает со случаем VI).

Отметим, что при $p = q = 0$ получается случай, расмотренный в [5]. Здесь этот случай не приводится.

VIII) Пусть $n = 2$, $m = -2$. Все подслучаи, которые имеют место V), здесь тоже имеют место. Кроме того, можно убедиться, что определяющие уравнения (6), (15) удовлетворяются еще для произвольной функций $g(u)$ выбором

$$\xi^1 = c_1 x + c_2;\ \xi^2 = c_3 y + c_4;\ \eta(u) = c_5[g(u)]^{-\alpha} + \beta[g(u)]^{-\alpha}\int[g(s)]^{\alpha}ds \tag{60}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{p+q-1}$; $\beta = \dfrac{c_1(p-2) + qc_3}{p+q-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.
3. Минасян М. М. Некоторые исследования ударных волн в сплошных средах.-Автореферат диссертации, М.: 1973.
4. Азатян Л. Д. Определение нелинейного решения в окрестности магнитозвуковой волны.- Уч. записки ЕГУ, 1974, 3.
5. D. J. Arrigo, Group Properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$, Int. J. Non-Linear Mech., 26(1), 619-629, 1991.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
26.02.1999