ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВАХ ДИЭЛЕКТРИКА И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА

Бардзокас Д.И., Сеник Н.А.

Դ.Ի. Բարձոկաս, Ն.Ա. Սենիկ

Էլեկտրոդների զույգով ակուստիկորեն կապակցված դիէլեկտրիկի և պյեզոէլեկտրիկի կիսատարածություններում սահքի ալիքների գրգռումը

Ակուստիկորեն կապակցված առաձգական կիսատարածություններում, երբ կիսատարածություններից մեկը պատրաստված է պյեզոէլեկտրիկից, ուսումնասիրվում է սահքի մակերևույթային ալիքի տարածման հնարավորության հարցը, ընդ որում ենթադրվում է, որ սահքի ալիքը տեղայնացված է կիսատարածությունների միացման մակերևույթի շրջակայքում: Որոշակի պայմանների դեպքում, երբ կոնտակտային հարթության վրա դասավորված է տարանուն լիցքերով էլեկտրոդների զույգը, ցույց է տրված նշված տիպի ալիքների գոյությունը: Խնդրի լուծումը բերված է եզակի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որն իր հերթին հանգեցված է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի:

D.I. Bardzokas, N.A. Senik

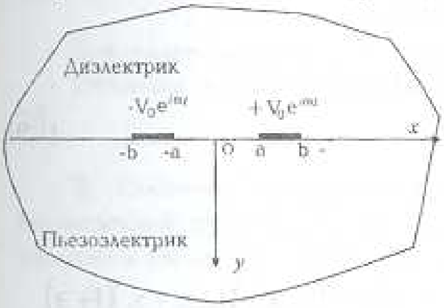
Perturbation of Shear Waves in Acoustic Coupled Half-Spaces of a Dielectric and a Piezoelectric with a Pair of Electrodes

Для упругих акустически связанных полупространств, когда одно из полупространств является пьезоэлектриком, исследуется вопрос существования сдвиговой поверхностной волны, локализованной у контактной поверхности полупространств. При этом предполагается, что на контактной плоскости расположена пара разноименно заряженных электродов, возбуждающих колебания.

Наличие пьезоэффекта в среде может существенно изменять волновые поля, приводя к существованию новых типов волн. В случае контакта двух упругих полупространств возможно существование вертикально поляризованных волн Стоунли [1]. Аналогичная задача, когда одно из полупространств или оба являются пьезоэлектриками, исследовалась в [2]. Для упругих акустически связанных полупространств сдвиговая поверхностная волна недопустима, однако, когда одно из полупространств является пьезоэлектриком, то при определенных условиях оказывается возможным существование сдвиговой волны, локализованной у контактной поверхности полупространств. Эти волны допускают возбуждение системами встречно-штыревых электродов.

1. Пусть упругий диэлектрик с модулем сдвига μ_0, диэлектрической проницаемостью ε_0 и плотностью ρ_0 занимает полупространство $y<0$, а полупространство $y>0$ занято пьезоэлектриком симметрии класса $6mm$, причем ось симметрии шестого порядка кристалла, параллельная оси z, расположена в контактной плоскости и перпендикулярна к направлению распространения волны. Будем также предполагать, что на контактной

плоскости $y=0$ расположена пара разноименно заряженных электродов, возбуждающих колебания (фиг.1).



Фиг. 1

В области упругого диэлектрика амплитуды потенциала электрического поля и смещения могут быть представлены в виде (временной фактор $\exp(i\omega t)$ опущен)

$$\varphi_0=\int_0^\infty A_0(p)\exp(py)\sin(px)dp \tag{1.1}$$

$$w_0=\int_0^\infty B_0(p)\exp[ys_0(p)]\sin(px)dp \tag{1.2}$$

где $\kappa_0=\omega/V_0$, $V_0^2=\mu_0/\rho_0$, $s_0=\begin{cases}\left(p^2-\kappa_0^2\right)^{1/2}, & p>\kappa_0\\ i\left(\kappa_0^2-p^2\right)^{1/2}, & p<\kappa_0\end{cases}$

В области пьезоэлектрика потенциал и смещение определим соотношениями [3,4]

$$\varphi_1=e_{15}w/\text{Э}_{11}+\psi \tag{1.3}$$

$$\psi=\int_0^\infty \Phi_1(p)\exp(-py)\sin(px)dp \tag{1.4}$$

$$w_1=\int_0^\infty B_1(p)\exp[-ys_1(p)]\sin(px)dp \tag{1.5}$$

Здесь $\kappa_1=\omega/V_1$, $V_1^2=\mu_1/\rho_1$, $\mu_1=C_{44}(1+k_{15}^2)$,

$s_1=\begin{cases}\left(p^2-\kappa_1^2\right)^{1/2}, & p>\kappa_1\\ i\left(\kappa_1^2-p^2\right)^{1/2}, & p<\kappa_1\end{cases}$, а выбор корней s_0, s_1 согласован с условиями излучения.

Неизвестные функции $A_0(p)$, $B_0(p)$, $\Phi_1(p)$, $B_1(p)$, входящие в (1.1)-(1.5), определим так, чтобы выполнялись следующие контактные условия при $y=0$:

$$\sigma_{yz}^{(0)}=\sigma_{yz}^{(1)},\quad w_0=w_1,\quad -\infty<x<\infty \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}D_y^{(0)}=D_y^{(0)},\quad -a<x<a,\quad -\infty<x<-b,\quad b<x<\infty\\ \varphi_1-\varphi_0=\pm V_0,\quad -b<x<-a,\quad a<x<b\end{gathered} \tag{1.7}$$

Используя закон Гука для упругого диэлектрика и уравнения состояния для пьезоэлектрика [3,4], с учетом соотношений (1.1)-(1.5) из условий (1.6) находим

$$\begin{gathered}B_0=B_1,\quad \Phi_1=(\mu_0s_0+\mu_1s_1)B_1/(e_{15}p)\\ A_0=e_{15}\left[1-\text{Э}_{11}(\mu_0s_0+\mu_1s_1)/(e_{15}^2p)\right]B_1/\text{Э}_{11}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Дальнейшее использование уравнений состояния, соотношений (1.1)-(1.5) и условий (1.7) совместно с формулами (1.8) приводит к следующей системе тройных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{F_1(p)}{F_2(p)} B_*(p)\sin(px)dp = V_*, \quad a < x < b \\ &\int_0^\infty pB_*(p)\sin(px)dp = 0, \qquad 0 \le x < a \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь

$$F_1(p) = k_{15}^2 p - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(\mu_* s_0 + s_1\right), \;\; F_2(p) = э\, k_{15}^2 p - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(\mu_* s_0 + s_1\right)\left(1 + э\right)$$

$$B_*(p) = \left[1 - \left(1 + k_{15}^2\right)\left(1 + э\right)\left(\mu_* s_0 + s_1\right)/\left(э\, k_{15}^2 p\right)\right] B_1(p)$$

Так как подынтегральная функция в первом уравнении системы (1.9) может иметь полюсы, то интеграл в этом случае понимается в смысле главного значения.

2. Полюс подынтегральной функции определяется корнем уравнения

$$\delta p = \left(\mu_* \sqrt{p^2 - \beta^2 \kappa_1^2} + \sqrt{p^2 - \kappa_1^2}\right), \; \beta = V_1/V_0, \; \delta = \frac{э\, k_{15}^2}{\left(1 + э\right)\left(1 + k_{15}^2\right)} \tag{2.1}$$

Анализ корней уравнения (2.1) показывает, что:

1) при $\mu_* = 0$ имеется единственный корень

$$p_* = \kappa_1 / \sqrt{1 - \delta^2} \tag{2.2}$$

определяющий волну Гуляева-Блюстейна для неэлектродированного полупространства [3,4].

2) В случае, когда скорость объемной волны в пьезоэлектрике больше скорости соответствующей волны в диэлектрике, то есть $\beta > 1$ и $\beta > 1/\sqrt{1 - \delta^2}$, уравнение (2.1) корней не имеет. Если же $1 < \beta < 1/\sqrt{1 - \delta^2}$, то корень уравнения (2.1) расположен в диапазоне

$$\beta\kappa_1 < p_1 < \min(p_*, p_2), \quad p_2 = \beta\kappa_1 / \sqrt{1 - \left(\delta/\mu_*\right)^2} \tag{2.3}$$

3) В случае, когда свойства сред удовлетворяют условиям $\beta < 1$ и $\beta/\sqrt{1 - \delta^2} < 1$, уравнение (2.1) корней не имеет. Если же $\beta < 1$ и $\beta/\sqrt{1 - \delta^2} > 1$, то корень уравнения удовлетворяет условиям

$$\kappa_1 < p < \min(p_*, p_2) \tag{2.4}$$

Заметим, что уравнение (2.1) является биквадратным уравнением и поэтому его прямое решение не представляет сложностей. Очевидно также, что ПАВ в рассматриваемой структуре является бездисперсионной. Влияние пьезоэффекта и диэлектрических свойств упругого диэлектрика оказывается принципиальным, поскольку пренебрежение этими параметрами приводит к потере ПАВ. Для того, чтобы полученные корни определяли экспоненциально затухающие волны при удалении от контактной плоскости, необходимо, чтобы корни уравнения (2.1) во всех рассмотренных случаях удовлетворяли условию

$$p = \max(\beta\kappa_1, \kappa_1) \tag{2.5}$$

Как видно, оценки (2.3), (2.4) удовлетворяют условию (2.5).

Отметим, что аналогичные результаты были получены ранее в работе [5].

3. Система интегральных уравнений (1.9) сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений аналогично тому, как это сделано в [3] для подобных уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega_{nm} + \gamma_{nm}) = \delta_{0m}, \quad (m = 0,1,2,\ldots) \tag{3.1}$$

$$\omega_{nm} = \frac{\delta_{nm}}{n} - \frac{4(-\alpha)^{n+m}}{\pi(n+m)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(n-m)\theta(\cos\theta)^{n+m}\, d\theta}{\left[1+\left(1-\alpha^2\cos^2\theta\right)^{1/2}\right]^{n+m}}, \quad n+m>0$$

$$\omega_{00} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\left[1+\left(1-\alpha^2\cos^2\theta\right)^{1/2}\right] d\theta + 2\ln(2/\alpha), \quad \delta_{nm} = \begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

$$\gamma_{nm} = \int_0^{\infty} F_0(\xi) J_n\left(\xi\frac{\bar{b}-1}{2}\right) J_m\left(\xi\frac{\bar{b}-1}{2}\right) S_n\left(\xi\frac{\bar{b}+1}{2}\right) S_m\left(\xi\frac{\bar{b}+1}{2}\right)\frac{d\xi}{\xi}, \quad \xi = pa, \ \bar{b} = b/a$$

$$F_0(\xi) = \frac{k_{15}^2\left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu_* s_2^* + s_1^*\right) - k_{15}^2\left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\mu_*\right)\xi}{\left[k_{15}^2 - \left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\mu_*\right)\right]\left[\text{э}\, k_{15}^2\xi - \left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\text{э}\right)\left(\mu_* s_2^* + s_1^*\right)\right]}$$

$$\alpha = (b-a)/(b+a), \quad \lambda = \kappa_1\alpha, \quad s_1^* = \left(\xi^2 - \lambda^2\right)^{1/2}, \quad s_2^* = \left(\xi^2 - \beta^2\lambda^2\right)^{1/2}$$

Функция $S_n(\ldots)$ определена в [3].

Функция $B_*(\xi)$, входящая в систему (1.9), связана с решением системы (3.1) выражением

$$\xi B_*(\xi) = C\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n\left(\xi\frac{\bar{b}-1}{2}\right) S_n\left(\xi\frac{\bar{b}+1}{2}\right) \tag{3.2}$$

где $C = 2\dfrac{\text{э}_{11}\, Va}{e_{15}\,\text{э}}\,\dfrac{\text{э}_{11}\; k_{15}^2 - \left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\text{э}\right)\left(\mu_*+1\right)}{k_{15}^2 - \left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu_*+1\right)}$

После решения системы (3.1) характеристики полей в пьезоэлектрике и упругом диэлектрике могут быть определены. Заметим, что при вычислении интегралов γ_{nm} необходимо учитывать полюс в подынтегральной функции, который может существовать при установленных выше условиях.

Не останавливаясь на деталях вычислений, приведем выражение для потенциала электрического поля в диэлектрике

$$\varphi_0 = \frac{e_{15}\,\text{э}}{\text{э}_{11}\, a}\int_0^{\infty} \frac{k_{15}^2\xi - \left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu_* s_2^* + s_1^*\right) B_*(\xi)\exp(\xi\bar{y})\sin(\xi\bar{x})\, d\xi}{f_0(\xi)} \tag{3.3}$$

$$\text{э}\,k_{15}^2\xi-\left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\text{э}\right)\left(\mu_*s_2^*+s_1^*\right)=f_0(\xi),\ \bar{x}=x/a,\ \bar{y}=y/a,\ \xi=pn$$

Учитывая вклад полюсной точки при интегрировании (3.3), для распространяющейся в положительном направлении оси x волны получим

$$\varphi_0^v=N_0G(\xi_*)Q(\xi_*)\exp(\xi_*\bar{y})\exp\left[i(\omega t-\xi_*x)\right],\quad y<0 \tag{3.4}$$

Здесь введены обозначения

$$N_0=\frac{\text{э}\,k_{15}^2-\left(1+k_{15}^2\right)\left(1+\text{э}\right)\left(\mu_*+1\right)}{k_{15}^2-\left(1+k_{15}^2\right)\left(\mu_*+1\right)}V\pi,\quad Q(\xi_*)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nJ_n\left(\xi_*\frac{\bar{b}-1}{2}\right)S_n\left(\xi_*\frac{\bar{b}+1}{2}\right)$$

$$G(\xi_*)=\frac{k_{15}^2\xi_*-\left(1+k_{15}^2\right)\left[\mu_*s_2^*(\xi_*)+s_1^*(\xi_*)\right]}{f_0'(\xi_*)},\quad f_0'(\xi_*)=\frac{df_0(\xi_*)}{d\xi}$$

причем ξ_* — корень уравнения $f_0(\xi)=0$, а полюс при интегрировании обходится сверху.

Аналогично определяется сдвиговое смещение в диэлектрическом полупространстве, связанное с распространяющейся поверхностной волной

$$w_0^s=N_0\frac{k_{15}^2\,\text{э}_{11}}{e_{15}}Q(\xi_*)\exp\left(s_2^*(\xi_*)\bar{y}\right)\exp\left[i(\omega t-\xi_*x)\right]/f'(\xi_*),\qquad y<0 \tag{3.5}$$

Проведенные вычисления для пьезоэлектрического полупространства приводят к следующим формулам:

$$\varphi_1^s=N_0k_{15}^2Q(\xi_*)\left[\exp\left(-s_2^*(\xi_*)\bar{y}\right)-\frac{1+k_{15}^2}{k_{15}^2}\frac{\mu_*s_2^*(\xi_*)+s_1^*(\xi_*)}{\xi_*}\exp(-\xi_*-\bar{y})\right]\times$$

$$\times\exp\left[i(\omega t-\xi_*x)\right]/f'(\xi_*),\qquad y>0 \tag{3.6}$$

$$w_1^s=N_0\frac{k_{15}^2\,\text{э}_{11}}{e_{15}}Q(\xi_*)\exp\left(-s_1^*(\xi_*)\bar{y}\right)\exp\left[i(\omega t-\xi_*x)\right]/f_0'(\xi_*),\qquad y<0$$

Соотношения (3.5), (3.6) позволяют определить другие характеристики полей и затем подсчитать потоки энергии, переносимые в полупространствах. В направлении распространения волны проинтегрированные по переменной y суммарные потоки механической и электрической энергий определяются соответственно по формулам

$$Q_0^{(E)}=\frac{\omega\,\text{э}_0\,N_0^2}{4}\left[\left|Q(\xi_*)\right|G(\xi_*)/\xi_*\right]^2$$

$$Q_0^{(F)}=\frac{\omega N_0^2k_{15}^4\,\text{э}_{11}^2}{4e_{15}^2}\left[\left|Q(\xi_*)\right|/f_0(\xi_*)\right]^2\frac{\mu_0\xi_*}{as_2^*(\xi_*)} \tag{3.7}$$

$$Q_1^{(F)}=\frac{\omega\,\text{э}_1\,\xi_*}{2}\left[\frac{N_0k_{15}^2\left|Q(\xi_*)\right|}{f_0(\xi_*)}\right]^2\left\{\frac{1}{2s_1^*(\xi_*)}+\frac{1}{2\xi_*}\left[\frac{1+k_{15}^2}{k_{15}^2}\left(\mu_*s_2^*(\xi_*)+s_1^*(\xi_*)\right)\right]^2-\right.$$

$$\left.-2\frac{1+k_{15}^2}{k_{15}^2}\frac{\mu_*s_2^*(\xi_*)+s_1^*(\xi_*)}{\xi_*+s_1^*(\xi_*)}\right\} \tag{3.8}$$

$$Q_1^{(e)} = \frac{\omega\xi_* k_{15}^2\left(1+k_{15}^2\right)N_0^2\, Э_{11}\left|Q(\xi_*)\right|^2}{2a\left[f_0(\xi_*)\right]^2}\left[\frac{\mu_* s_2^*(\xi_*)+s_1^*(\xi_*)}{\left(\xi_*+s_1^*(\xi_*)\right)\xi_*}-\frac{1}{2s_1^*(\xi_*)}\right]$$

причем формулы (3.8) относятся к упругому диэлектрику, а (3.7) – к пьезоэлектрику.

Из полученных формул следует, что отношения вида $Q_k^{(E)}/Q_k^{(e)}$ не зависят от величины $\left|Q(\xi_*)\right|$ и поэтому доля каждой из энергий в общем потоке энергии может быть определена без решения системы уравнений (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoneley R. The elastic waves at the interface of separation of two solids. – Proc. Roy. Soc. Lond., 1924, 106, A, p.416-429.
2. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Исследование поверхностных волн Стоунли на границе раздела электроупругих сред. – ПМ, 1987, т.23, №9, с.67-72.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. 470 с.
4. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. – Новосибирск: Наука, 1982, 240 с.
5. Филиппов В.В., Любимов В.Н. О поверхностных поперечных упругих волнах на границе диэлектрика с пьезоэлектриком. – Изв. АН БССР, сер.физ.-мат. н., 1982, №3, с.69-73.

Афинский национальный
технический университет, Греция

Поступила в редакцию
20.04.1999