ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **53, №1, 2000** Механика

УДК 539.3.01

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ

Хачатрян А.М.

Ա.Մ.Խաչատրյան

Անիզոտրոպ կոր երկշերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը շերտերի միջև կոնտակտի տարբեր պայմանների դեպքում

Ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդով կառուցված է ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված կորագիծ երկշերտի ներքին խնդրի լուծումը՝ շերտերի միջև լրիվ և ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում: Լրիվ կոնտակտի դեպքում ստացված հավասարումները համեմատված են Կիրխհոֆ-Կլեբշի դասական տեսության հավասարումների հետ: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

A.M.Khachatrian

The Stress-Strain State of an Anisotrope Two-Layered Curved Strip with Different Conditions of the Contacts between the Strips

Асимптотическим методом выведены уравнения и расчетные формулы для двухслойной криволинейной полосы с общей анизотропией при полном и неполном контактах между слоями. Полученные уравнения при полном контакте сопоставлены с классическими уравнениями Кирхгофа-Клебша. Рассмотрены конкретные примеры.

Методом асимптотического интегрирования построено решение внутренней задачи анизотропной двухслойной криволинейной балки при полном и неполном контактах между слоями. Используется асимптотика, предложенная А.Л.Гольденвейзером [1,2], справедливая также для анизотропных пластинок и оболочек [3]. Континуальная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах построена в [4]. В работах [5,6] методом асимптотического интегрирования исследовано напряженно-деформированное состояние (НДС) анизотропной слоистой балки при полном контакте между слоями, двухслойной анизотропной полосы-балки, когда между слоями заданы условия неполного контакта. В работе [7] тем же методом исследовано НДС однослойного криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией.

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния двухслойного плоского криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией. Предполагается, что стержень имеет общую постоянную ширину $2h$, ограничен в плане двумя дугами концентрических окружностей R_1 и R_2 $(R_2 > R_1)$. Радиус

окружности, разделяющей верхний и нижний слои $- R_0$. Слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$ $(k = 1,2)$.

На криволинейных сторонах стержня заданы значения напряжений, а на торцах — различные комбинации торцевых условий.

$$\sigma_{r\theta} = \pm\sqrt{h/R_0}\,Y^{\pm}(\theta), \sigma_r = \pm Z^{\pm}(\theta) \text{ при } r = R_2, R_1 \tag{1.1}$$

На линии раздела двух слоев $r = R_0$ имеем следующие условия контакта:

а) полный контакт

$$w_1 = w_2,\ v_1 = v_2,\ \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \tag{1.2}$$

б) неполный контакт

$$w_1 = w_2,\ \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = \varepsilon^{-1} f(\theta) \tag{1.3}$$

где $\varepsilon = \sqrt{h/R_0}$ — малый геометрический параметр, $f(\theta)$ считается заданной.

Для решения сформулированной задачи введем безразмерную координатную систему ζ, φ по формулам

$$\zeta = (r - R_0)/h,\ \varphi = \theta/\varepsilon,\ h = (h_1 + h_2)/2 \tag{1.4}$$

После этих преобразований соответствующие уравнения теории упругости анизотропного тела в полярных координатах будут содержать малый параметр. Это сингулярно возмущенная система, следовательно, ее решение складывается из двух типов решений: внутреннего и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи будем искать в виде [1-3]

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)} \tag{1.5}$$

где $Q^{(k)}$ — любое из напряжений и безразмерных перемещений, $V^{(k)} = v_k/R_0$, $W^{(k)} = w_k/R_0$, S — число приближений, k — номер слоя и принимает значения $k = 1,2$. Целые числа q_k выбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему. Эта цель достигается при [7]

$$q_k = 2 \text{ для } \sigma_\theta^{(k)}, W^{(k)},\ q_k = 1 \text{ для } \sigma_{r\theta}^{(k)}, V^{(k)},\ q_k = 0 \text{ для } \sigma_r^{(k)} \tag{1.6}$$

Подставив (1.5) в вышеуказанные уравнения, с учетом (1.6), получим систему

$$\frac{\partial\sigma_r^{(k,s)}}{\partial\zeta} - \sigma_\theta^{(k,s)} + \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s)}}{\partial\varphi} + \zeta\frac{\partial\sigma_r^{(k,s-2)}}{\partial\zeta} + \sigma_r^{(k,s-2)} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_\theta^{(k,s)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\zeta\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}}{\partial\zeta}+2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}=0$$

$$\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\zeta}=a_{11}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)}+a_{12}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_{16}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\varphi}+W^{(k,s)}=a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)}+a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)}+a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)}+$$
$$+\zeta\left(a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)}+a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)}\right)$$

$$\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(k,s)}}{\partial\varphi}+\zeta\frac{\partial V^{(k,s-2)}}{\partial\zeta}-V^{(k,s-2)}=a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)}+$$
$$+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}+\zeta\left(a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-5)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-3)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-4)}\right)$$

Решением этой системы является

$$W^{(k,s)}=w^{(k,s)}(\varphi)+w^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

$$V^{(k,s)}=-\frac{dw^{(k,s)}}{d\varphi}\zeta+v^{(k,s)}(\varphi)+v^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

$$\sigma_\theta^{(k,s)}=-\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\frac{d^2w^{(k,s)}}{d\varphi^2}\zeta+\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(w^{(k,s)}+\frac{dv^{(k,s)}}{d\varphi}\right)+\sigma_\theta^{*(k,s)}(\varphi,\zeta) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(k,s)}=\frac{1}{2a_{22}^{(k)}}\frac{d^3w^{(k,s)}}{d\varphi^3}\zeta^2-\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{dw^{(k,s)}}{d\varphi}+\frac{d^2v^{(k,s)}}{d\varphi^2}\right)\zeta+\tau_{r\theta0}^{(k,s)}(\varphi)+\sigma_{r\theta}^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

$$\sigma_r^{(k,s)}=-\frac{1}{6a_{22}^{(k)}}\frac{d^4w^{(k,s)}}{d\varphi^4}\zeta^3+\frac{1}{2a_{22}^{(k)}}\frac{d^3v^{(k,s)}}{d\varphi^3}\zeta^2+\frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(w^{(k,s)}+\frac{dv^{(k,s)}}{d\varphi}\right)\zeta-$$
$$-\frac{d\tau_{r\theta0}^{(k,s)}}{d\varphi}\zeta+\tau_{r0}^{(k,s)}(\varphi)+\sigma_r^{*(k,s)}(\varphi,\zeta)$$

здесь $w^{(k,s)}$, $v^{(k,s)}$, $\tau_{r\theta0}^{(k,s)}$, $\tau_{r0}^{(k,s)}$ — неизвестные пока функции, подлежащие определению, а величины со звездочками определяются по формулам

$$w^{*(k,s)}=\int_0^\zeta\left(a_{11}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)}+a_{12}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}+a_{16}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)}\right)d\zeta$$

$$v^{*(k,s)}=\int_0^\zeta\left(a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-3)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}\right)d\zeta+$$
$$+\int_0^\zeta\zeta\left(a_{16}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-5)}+a_{26}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-3)}+a_{66}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-4)}\right)d\zeta+$$
$$+\int_0^\zeta\left(-\frac{\partial w^{*(k,s)}}{\partial\varphi}-\zeta\frac{\partial V^{(k,s-2)}}{\partial\zeta}+V^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_\theta^{*(k,s)} = \frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left[w^{*(k,s)} + \frac{\partial v^{*(k,s)}}{\partial\varphi} - \left(a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)}\right) - \right.$$

$$\left. - \zeta\left(a_{12}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-4)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-3)} + a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)}\right)\right] \tag{1.9}$$

$$\sigma_{r\theta}^{*(k,s)} = -\int_0^\zeta\left(\frac{\partial\sigma_\theta^{*(k,s)}}{\partial\varphi} + \zeta\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}}{\partial\zeta} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$

$$\sigma_r^{*(k,s)} = \int_0^\zeta\left(\sigma_\theta^{*(k,s)} - \frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(k,s)}}{\partial\varphi} - \zeta\frac{\partial\sigma_r^{(k,s-2)}}{\partial\zeta} - \sigma_r^{(k,s-2)}\right)d\zeta$$

Для определения неизвестных функций необходимо удовлетворить условиям контакта (1.2) или (1.3), а также граничным условиям (1.1).

Учитывая, что при $r = R_0$ $(\zeta = 0)$, $w^{*(k,s)} = v^{*(k,s)} = 0$, $\sigma_r^{*(k,s)} = \sigma_{r\theta}^{*(k,s)} = 0$ и удовлетворив условиям полного контакта (1.2), получим

$$w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)},\quad v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{(s)},\quad \tau_{r0}^{(1,s)} = \tau_{r0}^{(2,s)},\quad \tau_{r\theta 0}^{(1,s)} = \tau_{r\theta 0}^{(2,s)} \tag{1.10}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно перемещений $w^{(s)}$ и $v^{(s)}$:

$$C\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2}\right) + K\frac{d^3w^{(s)}}{d\varphi^3} = p^{(s)}$$

$$D\frac{d^4w^{(s)}}{d\varphi^4} + K\left(2\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3v^{(s)}}{d\varphi^3}\right) + C\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) = q^{(s)} \tag{1.11}$$

где

$$C = C_1 + C_2,\quad K = K_1 - K_2,\quad D = D_1 + D_2$$

$$C_k = (-1)^k\zeta_k/a_{22}^{(k)},\quad K_k = -\zeta_k^2/\left(2a_{22}^{(k)}\right),\quad D_k = (-1)^k\zeta_k^3/\left(3a_{22}^{(k)}\right)$$

$$\zeta_1 = (R_1 - R_0)/h = -h_1/h,\quad \zeta_2 = (R_2 - R_0)/h = h_2/h \tag{1.12}$$

Обобщенные нагрузки $p^{(s)}$ и $q^{(s)}$ определяются по формулам

$$p^{(s)} = -(Y^{+(s)} + Y^{-(s)}) + \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2) - \sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1)$$

$$q^{(s)} = Z^{+(s)} + Z^{-(s)} + \zeta_2\frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} + \zeta_1\frac{dY^{-(s)}}{d\varphi} - \sigma_r^{*(2,s)}(\zeta_2) +$$

$$+ \sigma_r^{*(1,s)}(\zeta_1) - \zeta_2\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{\partial\varphi} + \zeta_1\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{d\varphi} \tag{1.13}$$

После удовлетворения граничным условиям (1.1) определяются также неизвестные функции $\tau_{r\theta 0}^{(2,s)}$ и $\tau_{r0}^{(2,s)}$

$$\tau_{r\theta 0}^{(2,s)} = Y^{+(s)} - \frac{1}{2a_{22}^{(k)}}\frac{d^3w^{(s)}2}{d\varphi^3}\zeta_2^2 + \frac{1}{a_{22}^{(k)}}\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2}\right)\zeta_2 - \sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)$$

$$\tau_{r0}^{(2,s)} = Z^{+(s)} + \zeta_2\frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} - \frac{1}{3a_{22}^{(2)}}\frac{d^4w^{(s)}2}{d\varphi^4}\zeta_2^3 + \frac{1}{2a_{22}^{(2)}}\left(2\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3v^{(s)}}{d\varphi^3}\right)\zeta_2^2 -$$

$$- \frac{1}{a_{22}^{(2)}}\left(w^{(s)} + \frac{dv}{d\varphi}\right)\zeta_2 - \sigma_r^{*(s)}(\zeta_2) - \zeta_2\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta_2)}{\partial\varphi} \qquad (1.14)$$

$$Z^{\pm(0)}, Y^{\pm(0)} = Z^{\pm}, Y^{\pm}, \quad Z^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0 \;\; s > 0$$

Таким образом, все величины будут определены, если будут известны перемещения $v^{(s)}$ и $w^{(s)}$.

Если в первых двух уравнениях (1.7) и соотношениях (1.8) перейти от напряжений к статически эквивалентным им усилиям и моментам

$$N^{(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{(1,s)}d\zeta + \int_0^{\zeta_2}\sigma_\theta^{(2,s)}d\zeta, \quad N^{*(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{*(1,s)}d\zeta + \int_0^{\zeta_2}\sigma_\theta^{*(2,s)}d\zeta$$

$$M^{(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\zeta\sigma_\theta^{(1,s)}d\zeta + \int_0^{\zeta_2}\zeta\sigma_\theta^{(2,s)}d\zeta, \quad M^{*(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\zeta\sigma_\theta^{*(1,s)}d\zeta + \int_0^{\zeta_2}\zeta\sigma_\theta^{*(2,s)}d\zeta \qquad (1.15)$$

$$Q^{(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_{r0}^{(1,s)}d\zeta + \int_0^{\zeta_2}\sigma_{r0}^{(2,s)}d\zeta, \quad Q^{*(s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_{r0}^{*(1,s)}d\zeta + \int_0^{\zeta_2}\sigma_{r0}^{*(2,s)}d\zeta$$

получим уравнения

$$\frac{dQ^{(s)}}{d\varphi} - N^{(s)} = -\left(Z^{+(s)} + Z^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2 Z^{+(s-2)} + \zeta_1 Z^{-(s-2)}\right)$$

$$\frac{dN^{(s)}}{d\varphi} + Q^{(s-2)} = -\left(Y^{+(s)} + Y^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2 Y^{+(s-2)} + \zeta_1 Y^{-(s-2)}\right) \qquad (1.16)$$

$$\frac{dM^{(s)}}{d\varphi} - Q^{(s)} = -\left(\zeta_2 Y^{+(s)} - \zeta_1 Y^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2^2 Y^{+(s-2)} - \zeta_1^2 Y^{-(s-2)}\right)$$

и соотношения

$$N^{(s)} = K\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} + C\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + N^{*(s)}$$

$$Q^{(s)} = -D\frac{d^3w^{(s)}}{d\varphi^3} - K\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2}\right) + \zeta_2 Y^{+(s)} + \zeta_1 Y^{-(s)} +$$

$$\zeta_1\sigma_{r0}^{*(1,s)}(\zeta_1) - \zeta_2\sigma_{r0}^{*(2,s)}(\zeta_2) + Q^{*(s)} \qquad (1.17)$$

$$M^{(s)} = -D\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2} - K\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + M^{*(s)}$$

которые, за исключением второго уравнения (1.16), совпадают с уравнениями Кирхгофа-Клебша для двухслойной кривой балки с той лишь разницей, что во втором уравнении в нулевом приближении отсутствует слагаемое Q, которое присутствует в классических уравнениях [9]. Этот член в ходе асимптотического интегрирования уравнений теории упругости появляется, начиная с приближения $s = 2$.

Если хотим уточнить классические уравнения, то необходимо учитывать все члены порядка $O(\varepsilon^2)$. Тогда можно рекомендовать уравнения (1.16) и соотношения (1.17), оставляя все члены, имеющие порядок $O(\varepsilon^2)$ (в (1.17) они содержатся в выражениях $N^{*(s)}, Q^{*(s)}, M^{*(s)}$ в неявном виде).

2. Рассмотрим неполный контакт. Из условий (1.3), с учетом (1.8), вытекает

$$
\begin{gathered}
w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)}, \qquad \tau_{r0}^{(1,s)} = \tau_{r0}^{(2,s)} \\
\tau_{r00}^{(1,s)} = \tau_{r00}^{(2,s)} = f^{(s)}(\varphi), \quad f^{(0)}(\varphi) = f(\theta/\varepsilon), \quad f^{(s)}(\varphi) = 0 \; s > 0
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Удовлетворив условиям (1.1), получим следующие дифференциальные уравнения для определения перемещений:

$$
\begin{gathered}
C_k\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(k,s)}}{d\varphi^2}\right) + K_k \frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} = f^{(s)}(\varphi) + p_k^{(s)} \\
D\frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4} + K_2\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(2,s)}}{d\varphi^3}\right) - K_1\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(1,s)}}{d\varphi^3}\right) + \\
+ C_2\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(2,s)}}{d\varphi}\right) - C_1\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(1,s)}}{d\varphi}\right) = q^{(s)}
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

где жесткости C_k, K_k и D определяются по формулам (1.12), а обобщенные нагрузки $p_k^{(s)}$ и $q^{(s)}$ – следующим образом:

$$
p_1^{(s)} = -Y^{-(s)} + \sigma_{r0}^{*(1,s)}(\zeta_1), \quad p_2^{(s)} = Y^{+(s)} + \sigma_{r0}^{*(2,s)}(\zeta_2) \tag{2.3}
$$

$$
\begin{gathered}
q^{(s)} = Z^{+(s)} + Z^{-(s)} + \zeta_2 \frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} + \zeta_1 \frac{dY^{-(s)}}{d\varphi} - \sigma_r^{*(2,s)}(\zeta_2) + \sigma_r^{*(1,s)}(\zeta_1) - \\
- \zeta_2 \frac{d\sigma_{r0}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{d\varphi} + \zeta_1 \frac{d\sigma_{r0}^{*(1,s)}(\zeta_1)}{d\varphi}
\end{gathered}
$$

Из граничных условий (1.1) определяем также неизвестную функцию $\tau_{r0}^{(k,s)}(\varphi)$

$$\tau_{r\theta}^{(2,s)} = Z^{+(s)} + \zeta_2 \frac{dY^{+(s)}}{d\varphi} - \sigma_r^{*(2,s)}(\zeta_2) - \frac{d\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\zeta_2)}{d\varphi} - D\frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4} -$$
$$- K_2\left(2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{d^3 v^{(2,s)}}{d\varphi^3}\right) - C_2\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(2,s)}}{d\varphi}\right) \tag{2.4}$$

Если в уравнениях (1.7) и соотношениях (1.8) перейти к усилиям и моментам, при этом используя для $Q^{(s)}, M^{(s)}, Q^{*(s)}, M^{*(s)}$ формулы (1.15), а $N^{(k,s)}$ и $N^{*(k,s)}$ определяя по формулам

$$N^{(1,s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{(1,s)}d\zeta,\ N^{(2,s)} = \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_\theta^{(2,s)}d\zeta,\ N^{*(1,s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_\theta^{*(1,s)}d\zeta,\ N^{*(2,s)} = \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_\theta^{*(2,s)}d\zeta \tag{2.5}$$

то получим следующие уравнения:

$$\frac{dN^{(k,s)}}{d\varphi} + Q^{(k,s-2)} = f^{(s)} - \zeta_k Y^{\mp(s)} + \zeta_k Y^{\mp(s-2)} \qquad (k = 1,2)$$
$$\frac{dQ^{(s)}}{d\varphi} - \left(N^{(1,s)} + N^{(2,s)}\right) = -\left(Z^{+(s)} + Z^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2 Z^{+(s-2)} + \zeta_1 Z^{-(s-2)}\right) \tag{2.6}$$
$$\frac{dM^{(s)}}{d\varphi} - Q^{(s)} = -\left(\zeta_2 Y^{+(s)} - \zeta_1 Y^{-(s)}\right) - \left(\zeta_2^2 Y^{+(s-2)} - \zeta_1^2 Y^{-(s-2)}\right)$$

где $Q^{(1,s)} = \int_{\zeta_1}^{0}\sigma_{r\theta}^{(1,s)}d\zeta, \quad Q^{(2,s)} = \int_{0}^{\zeta_2}\sigma_{r\theta}^{(2,s)}d\zeta$,

а также соотношения

$$N^{(k,s)} = K_2\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + C_k\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(k,s)}}{d\varphi}\right) + N^{*(k,s)} \qquad (k = 1,2)$$
$$Q^{(s)} = 2f^{(s)} + \frac{1}{2}D\frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} + K_2\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(2,s)}}{d\varphi^2}\right) - K_1\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2 v^{(1,s)}}{d\varphi^2}\right) + Q^{*(s)}$$
$$M^{(s)} = -D\frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} - K_2\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(2,s)}}{d\varphi}\right) + K_1\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(1,s)}}{d\varphi}\right) + M^{*(s)} \tag{2.7}$$

Заметим, что вместо трех уравнений (1.16) и трех соотношений (1.17) в задаче двухслойной криволинейной балки при полном контакте между слоями, при неполном контакте получили четыре уравнения (2.6) и столько же соотношений (2.7).

Ограничившись только исходным (нулевым) приближением в уравнениях (2.2) или (2.6) и перейдя к первоначальным величинам и координатам, получим уравнения, которые можно рекомендовать в качестве прикладных уравнений для двухслойных криволинейных балок при неполном контакте между слоями.

3. В заключение, в качестве иллюстрации, рассмотрим задачу чистого

изгиба кривых брусьев с постоянным сечением в виде узкого прямоугольника и кривой осью. Пусть брус изгибается в плоскости кривизны моментами M, приложенными на торцах [8].

Учитывая, что через R_1 и R_2 обозначены внутренний и внешний радиусы поверхности бруса, и приняв ширину прямолинейного поперечного сечения равной единице, получим следующие граничные условия:

$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R_1, R_2$$

$$\sigma_{r\theta} = 0, \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta dr = 0, \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta r dr = -M \quad \text{при } \theta = 0, \theta_0 \tag{3.1}$$

Сначала рассмотрим чистый изгиб однослойного кривого бруса с шириной $2h = R_2 - R_1$ и радиусом срединной оси $R_0 = (R_2 - R_1)/2$. Пользуясь формулами (1.8) и уравнениями (1.11)-(1.13), заранее полагая $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)}$, $h_1 = h_2 = h$ и ограничившись первыми двумя отличными от нуля приближениями, получим

$$\sigma_\theta = -\frac{6M}{(R_2 - R_1)^2}\zeta + \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2}(3\zeta^2 - 1), \qquad \sigma_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_r = -\frac{3M}{R_2^2 - R_1^2}(\zeta^2 - 1) + \frac{5M}{(R_2 + R_1)^2}\zeta(\zeta^2 - 1) \tag{3.2}$$

Если ширина бруса мала по сравнению с радиусом срединной оси стержня, то обычно напряженное состояние принимается таким же, как и в прямоугольном брусе (линейное распределение нормального напряжения σ_θ). Если же ширина не мала, то обычно полагают, что при изгибе поперечные сечения бруса остаются плоскими. Тогда распределение нормального напряжения σ_θ по любому поперечному сечению следует гиперболическому закону [8].

Представим наименьшее (при $r = R_2$) и наибольшее (при $r = R_1$) значения напряжения σ_θ в виде

$$\sigma_\theta = \frac{mM}{R_1^2} \tag{3.3}$$

В табл. 1 приведены наибольшее и наименьшее значения множителя m, вычисленные по двум элементарным методам, по асимптотическому методу и по точной формуле [8]. Из таблицы следует, что уже первых два приближения асимптотического решения дают достаточно точные результаты. Результаты же нулевого приближения точно совпадают с результатами, когда принимается закон линейного распределения нормального напряжения σ_θ.

Рассмотрим ту же задачу для двухслойного бруса. Граничные условия задачи принимаются те же, что и для однослойного бруса, то есть условия (3.1). Ограничившись только нулевым приближением, приведем значения напряжений.

Таблица 1

$\frac{R_2}{R_1}$	Линейное распределение напряжения (нулевое приближение асимптотического решения)	Гипотеза плоских сечений (гиперболическое распределение напряжения)	Асимптотическое решение (Два приближения)	Точное решение
1.3	±66.67	72.98, −61.27	72.76, −60.87	73.05, −61.35
2	±6.00	7.725, −4.863	7.33, −4.67	7.755, −4.917
3	±1.50	2.285, −1.095	2.00, −1.00	2.292, −1.130

а) полный контакт

$$\sigma_\theta^{(k)} = -\frac{4M}{(R_2-R_1)^2 a_{22}^{(k)} D_{12}}\left(\zeta + \frac{K}{C}\right), \qquad \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0$$

$$\sigma_r^{(k)} = -\frac{2M}{(R_2-R_1)^2 a_{22}^{(k)} D_{12}}\left[\left(\zeta^2 - \zeta_k^2\right) + \frac{2K}{C}(\zeta - \zeta_k)\right] \tag{3.4}$$

$$D_{12} = \frac{1}{h^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{R_2^3}{a_{22}^{(2)}} - \frac{R_1^3}{a_{22}^{(1)}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R_2^2}{a_{22}^{(2)}} - \frac{R_1^2}{a_{22}^{(1)}}\right)\left(\frac{R_2-R_1}{2} - \frac{Kh}{C}\right)\right]$$

б) неполный контакт

Предположим, что трение между слоями отсутствует $(f(x) = 0)$. Тогда

$$\sigma_\theta^{(k)} = -\frac{16M}{(R_2-R_1)^2 a_{22}^{(k)} D}\left(\zeta - \frac{1}{2}\zeta_k\right), \qquad \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0$$

$$\sigma_r^{(k)} = -\frac{8M}{(R_2^2-R_1^2) a_{22}^{(k)} D}\zeta(\zeta - \zeta_k) \tag{3.5}$$

Если слои имеют одинаковые физические и геометрические характеристики, то есть $h_1 = h_2$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = a_{ij}$, то $D = \frac{2}{3}\frac{1}{a_{22}}$, $\zeta_2 = 1, \zeta_1 = -1$, а максимальное значение $\sigma_\theta^{(k)}$ будет достигаться при $\zeta = \zeta_k$ и $\zeta = 0$ и будет равняться

$$\left|\sigma_\theta^{(k)}\right| = \frac{12M}{(R_2-R_1)^2} \tag{3.6}$$

что в два раза больше значения нормального напряжения σ_θ для однослойной полосы из такого же материала с общей толщиной $2h$. Таким образом, асимптотическим методом подтверждается известный факт, что однослойная полоса (балка) способна в первом приближении выдержать нагрузку в два раза большую, чем несвязанная двухслойная (неполный контакт, идеальное скольжение) [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. – ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
2. Гольденвейзер А.Л. О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. – В сб.: "Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды". М.: Наука, 1969. 692с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек.- М.: Наука, Физматлит, 1997. 415с.
4. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой упругой среды.- МТТ, №1, 1984, с.5-14.
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1986, т.39, №2, с.3-14.
6. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной двухслойной балки с проскальзыванием. - В сб. "Актуальные проблемы неоднородной механики". Ереван, 1991, с. 55-60.
7. Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. Исследование напряженно-деформированного состояния криволинейного стержня методом асимптотического интегрирования. – Изв. АН РА, Механика, 1991, т.44, №1, с.3-12.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1979, 560 с.
9. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Том 1.- М.: Машиностроение, 1968. 831с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов.- М.: Наука, 1986. 512с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
18.02.1999