ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 53, №1, 2000 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ СДВИГОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ (АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Սահքի դեֆորմացիայի մի մոդելի մասին (հակահարթ խնդիր)

Դասական հակահարթ խնդրում մարմնի չափը տեղափոխության ուղղությամբ չի մտնում շարժման հավասարման մեջ: Փորձ է արվում առաջին կարգի ճշտությամբ այդ բացը վերացնել:
Դիտարկված մի շարք խնդիրներում ցույց է տրված դրա ազդեցությունը: Հետաքրքիր է հատկապես այն, որ այդ դիտվածքով հնարավոր է մակերևույթային ալիքի գոյությունը:

L.A. Movsisyan
About one model of shear deformation (antiplane problem)

Классическая антиплоская задача получается в предположении независимости нормального к плоскости перемещения от координаты этого же направления. Предположение в общем случае верное, если тело в этом же направлении простирается до бесконечности. Такая же схема принимается и для обычной сдвиговой задачи, да и при изгибе коротких стержней (например, в задачах сейсмостойкости). При такой постановке протяженность тела (размер) в направлении перемещения не входит в уравнение движения. В предлагаемой работе сделана попытка в первом приближении учесть этот фактор и на различных примерах будет показана его роль.

1. Предположим, что сдвиг происходит в направлении оси z и координатная плоскость xy помещена в срединной плоскости тела. Относительно компонентов перемещения принимается

$$u_x = \frac{2}{h} z\varphi(x,y,t), \quad u_y = \frac{2}{h} z\psi(x,y,t), \quad u_z = w(x,y,t) \tag{1.1}$$

то есть обычное предположение гипотезы прямых при изгибе пластин, только здесь принимается, что материал, размеры тела и напряженное состояние такие, что нормальными напряжениями и связанными с ними моментами в уравнениях движения можно пренебречь. Тогда осредненные уравнения движения будут такими:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - N_1 = \rho\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - N_2 = \rho\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}dz, \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}dz, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}zdz \tag{1.2}$$

Уравнения (1.2) выведены в предположении, что внешние плоскости пластинки свободны от напряжений. Материал тела будем предполагать ортотропным. Тогда соотношениями упругости будут

$$N_1 = A_{55}h\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \ N_2 = A_{44}h\left(\frac{2}{h}\psi + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \ M = A_{66}\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (1.3)$$

2.Рассмотрим одномерные волны в направлении оси x. Тогда из (1.2) и (1.3) относительно w и φ получится система, которая дает для фазовой скорости следующее значение:

$$\frac{c}{a_1} = \sqrt{1+\gamma},\ \ c = \frac{\omega}{k},\ \ a_1 = \sqrt{A_{55}/\rho},\ \ \gamma = \frac{12}{h^2k^2} \qquad (2.1)$$

k – волновое число.

Как видно из (2.1), при $h \to \infty$ для фазовой скорости получается известное значение скорости сдвиговой волны (здесь имеется дисперсия).

Замечание 1. Возникает такой вопрос: ведь классическая постановка вместо (1.1) предполагает (в одномерном случае) $u_x = 0$, $u_z = w(x,t)$. При u_x, добавляя линейный член по z, не следует ли и в u_z добавить соответствующий член, то есть вместо (1.1) взять

$$u_x = \frac{2}{h}z\varphi,\ \ u_z = w + \frac{4}{h^2}z^2w_1 \qquad (2.2)$$

Возможны два пути для дальнейшего продвижения.

а) Если по (2.2) определить сдвиговое напряжение τ_{xz} и удовлетворить условиям свободной поверхности $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$, как, например, в [1], то для него получится

$$\tau_{xz} = A_{55}\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right)\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (2.3)$$

Если теперь повторить все процедуры с таким τ_{xz}, то для фазовой скорости получится то же выражение (2.1). Следует отметить, что вовсе не все величины по (2.3) и по п.1 будут одинаковыми, однако, сам по себе факт одинаковости фазовой скорости является примечательным.

б) Есть еще второй путь: заранее не удовлетворять условиям $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$, а это сделать в ходе осреднения уравнений движения [2]. Тогда для неизвестных φ, w и w_1 получится система

$$\begin{gathered}
A_{55}\left(\frac{2}{h}\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) = -\rho\frac{h}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \\
A_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right) \qquad (2.4) \\
A_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{5}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{3}{5}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right)
\end{gathered}$$

Система (2.4) дает две скорости: одна – по φ и w, как (2.1), и вторая – от w_1, равная классической $c = a_1$.

3. Теперь рассмотрим двумерные свободные колебания прямоугольной пластинки $(a \times b)$, края которой свободны $N_n = M = 0$. Как здесь, так и в

следующем пункте удобнее иметь систему в усилиях. Из (1.1) и (1.3) получим

$$\frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-N_1\right)+\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N_2}{\partial x\partial y}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial x}-N_2\right)+\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2}=\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 N_2}{\partial t^2} \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}-\frac{\partial N_1}{\partial y}-\frac{\partial N_2}{\partial x}=\frac{1}{a_3^2}\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}$$

Здесь $a_2=(A_{44}/\rho)^{1/2}$, $a_3=(A_{66}/\rho)^{1/2}$

Выбрав

$$N_1=A\sin\lambda_m x\cos\mu_n y,\quad N_2=B\cos\lambda_m x\sin\mu_n y$$
$$M=C\sin\lambda_m x\sin\mu_n y,\quad \lambda_m=m\pi/a,\ \mu_n=n\pi/b \qquad (3.2)$$

удовлетворим граничным условиям.

Дисперсионное уравнение в общем случае слишком громоздкое, чтобы его привести. Для выяснения влияния анизотропии и поперечного размера на частоты приведем его в частном случае: для "основной" частоты квадратичной пластинки $(a=b,\ m=n=1)$. Для безразмерной частоты оно имеет вид

$$\alpha\beta\Omega^3-[2\alpha+\beta(1+\alpha)(1+\delta)]\Omega^2+(2+\delta)(1+\alpha+\beta\delta)\Omega-4\delta=0 \qquad (3.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha=\frac{A_{55}}{A_{44}},\quad \beta=\frac{A_{55}}{A_{66}},\quad \Omega=\frac{\omega^2 a^2}{\pi^2 a_1^2},\quad \delta=\frac{12a^2}{\pi^2 h^2}$$

В табл.1 и 2 в каждой клетке помещены три корня уравнения (3.3) для различных α,β и δ. В каждой клетке третья строка соответствует основному движению от w. Как показывают таблицы, так и имеющиеся другие данные (для различных α,β и δ) эти частоты увеличиваются по сравнению с классической в новых обозначениях

$$\Omega=1+1/\alpha \qquad (3.4)$$

Эти частоты, как и при одномерном случае, с увеличением h уменьшаются.

Особо нужно сказать о вторых строках. Если в (3.1) пренебречь моментом, то полученная система дает дисперсионное уравнение

$$\alpha\Omega^2-(1+\alpha)(1+\beta)\Omega+(1+\delta)^2-1=0 \qquad (3.5)$$

Отсюда полученные частоты соответствуют первым и третьим строкам таблиц, то есть частоты вторых строк имеют моментное происхождение и еще интересно, что с увеличением h они увеличиваются.

Частоты, определенные из (3.5), меньше, чем по (3.3).

Как и следовало ожидать, вновь появившиеся частоты от φ и ψ, меньше, чем от w.

В предельном случае, когда $h\to\infty$, система (3.1) распадается на две системы и соответствующие частоты будут

$$
\begin{aligned}
\rho\omega^2 &= A_{55}\lambda_m^2 + A_{66}\mu_n^2 \\
\rho\omega^2 &= A_{66}\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)
\end{aligned} \qquad (3.6)
$$

4. Здесь обсудим такой вопрос: существует ли поверхностная волна, затухающая в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны. Как известно, в антиплоской задаче такой волны не существует.

Итак, пусть край пластинки $y = 0$ свободен: $N_2 = M = 0$ и волна распространяется в направлении оси x. Если искать решение (3.1) в виде

$$\left(N_1,\ N_2,\ M\right) = \left(A,\ B,\ C\right)\exp\left[py + i(kx - \omega t)\right] \qquad (4.1)$$

то характеристическое уравнение для определения p будет

$$
\begin{aligned}
& s^4 + Rs^2 + Q = 0 \\
& R = \frac{1}{\alpha_1}\left[(\alpha_1 - \gamma)(\alpha_3 - 1) + (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - \gamma) + 2\gamma\right] \\
& Q = (\alpha_1 - 1 - \gamma)(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_3\gamma),\ s = p/k,\ \ \alpha_i = \omega^2 / a_i^2 k^2
\end{aligned} \qquad (4.2)
$$

Для того, чтобы корни (4.2) имели отрицательную действительную часть, необходимо, чтобы

$$R < 0,\ \ Q > 0 \qquad (4.3)$$

Вычислив с такими s_i перерезывающие усилия и момент, после удовлетворения условиям свободной границы получим

$$\left(\alpha_3 - \alpha_2 - 2\gamma - 2\right)\left(s_1^2 - s_2^2\right) = 0 \qquad (4.4)$$

Равенство нулю первого множителя при условиях (4.3) невозможно, а равенство нулю второго множителя даст

$$R^2 - 4Q = 0 \qquad (4.5)$$

Совместимы ли условия (4.3) и (4.5)? Легко можно показать, что эти условия не могут быть осуществлены не только при $\gamma = 0$ $(h \to \infty)$, но и в изотропном $\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right)$, и даже в $\alpha_1 = \alpha_2$ случаях.

Конечно, можно было бы в общем случае определить те области параметров, когда эти условия имеют место. Но так как нашей целью является показать, что такая волна вообще существует, покажем это на конкретных значениях: если, например, взять $\alpha_1 = \alpha_3 = 0{,}5;\ \gamma = 0{,}01$, то значения α_2, удовлетворяющие всем приведенным условиям, будут $\alpha_2 = 0{,}9937$; $\alpha_2 = 0{,}04629$; то есть при этих значениях возможно существование поверхностной волны.

Следует отметить, что как здесь, так и в общем случае, существование и глубина проникновения поверхностной волны зависят от волнового числа (k).

5. Представляет также интерес вопрос распространения волны по настоящей модели при наличии пьезоэффекта. С этой целью рассмотрим задачу распространения одномерной сдвиговой волны в пьезоэлектрике $\overline{6}mm$ [3].

В предположении металлического слоя на внешних плоскостях электрический потенциал берется в виде [4]

$$\Phi(x,z,t) = F(x,t)\left(1-\frac{4}{h^2}z^2\right) \tag{5.1}$$

Тогда, согласно [3] и (1.2), одномерные уравнения движения примут вид

$$\begin{gathered}
A_{55}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{2}{3}e_2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
-A_{55}\left(\frac{2}{h}\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}e_2\frac{\partial F}{\partial x}=\rho\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{5.2}$$

а для неизвестной функции F имеем

$$e_2\left(\frac{2}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{2}{3}\kappa_1\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{2}{h}e_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{8}{h^2}\kappa_2 F=0 \tag{5.3}$$

Системы (5.2) и (5.3) для фазовой скорости дают

$$\frac{v^2}{a_1^2}=1+\gamma+\frac{e_2\left[e_2+\gamma(e_1+e_2)\right]}{A_{55}(\kappa_1+\gamma\kappa_2)} \tag{5.4}$$

то есть увеличению фазовой скорости способствует как поперечный размер, так и пьезоэффект.

$\delta = 0{,}01$ Таблица 1

β \ α	0,1	1	10
0,1	0,01812	0,01000	0,001811
	10,97	1,999	1,103
	20,12	20,01	20,01
1	0,01812	0,01000	0,001811
	1,988	1,8634	1,097
	11,10	2,146	2,012
10	0,01812	0,01000	0,001811
	0,1990	0,1989	0,1988
	11,09	2,011	1,110

$\delta = 0{,}1$ Таблица 2

β \ α	0,1	1	10
0,1	0,1758	0,1000	0,01758
	10,74	1,989	1,134
	21,19	20,11	20,06
1	0,1758	0,1000	0,01758
	1,891	1,6000	1,074
	12,03	2,500	2,119
10	0,1731	0,1000	0,01758
	0,1937	0,1895	0,1891
	11,93	2,110	1,203

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. 360с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. 334с.
3. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. 424 с.
4. Мовсисян Л.А. Волны изгиба и другие для одной пьезоэлектрической пластинки. – Изв.НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №2, с.21-27.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.03.1999